

Series A

I. MATHEMATICA

321

FORTSETZUNG EINER  
QUASIKONFORMEN ABBILDUNG  
ÜBER EINEN JORDANBOGEN

VON

MARTTI TIENARI

*Wird mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Sektion  
der Philosophischen Fakultät der Universität Helsinki am 15.  
September 1962 um 12 Uhr im Auditorium Porthania III  
zur öffentlichen Verteidigung vorgelegt.*

---

HELSINKI 1962  
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Series A

I. MATHEMATICA

321

FORTSETZUNG EINER  
QUASIKONFORMEN ABBILDUNG  
ÜBER EINEN JORDANBOGEN

VON

MARTTI TIENARI

*Wird mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Sektion  
der Philosophischen Fakultät der Universität Helsinki am 15.  
September 1962 um 12 Uhr im Auditorium Porthania III  
zur öffentlichen Verteidigung vorgelegt.*

---

HELSINKI 1962  
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

## Vorwort

Für die Anregung zu dieser Arbeit darf ich Herrn Prof. Dr. Olli Lehto und Herrn Doz. Dr. K. I. Virtanen an dieser Stelle meine aufrichtige Dankbarkeit aussprechen. Ihre stete Anteilnahme am Fortschreiten dieser Abhandlung und deren Förderung durch viele wertvolle Ratschläge lieferten einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen.

Herrn Doz. Dr. Jussi Väisälä bin ich zu bestem Dank verpflichtet. Er hat viele bedeutende Verbesserungen zu dieser Abhandlung vorgeschlagen.

Herrn Dipl. Phys. Wolfgang Raible bin ich für die sachkundige Aufsicht der sprachlichen Form sehr verbunden.

Der Emil Aaltonen Stiftung danke ich für die finanzielle Unterstützung.

Helsinki, im Mai 1962

MARTTI TIENARI

## Inhalt

	Seite
Einleitung .....	5
§ 1. Definition und Grundeigenschaften einer quasikonformen Abbildung .....	6
§ 2. Ränderzuordnung bei einer quasikonformen Abbildung .....	8
§ 3. Fortsetzung einer quasikonformen Abbildung eines Jordangebietes in die ganze Ebene .....	14
§ 4. Fortsetzung einer quasikonformen Abbildung über einen freien Jordanbogen	19
§ 5. Spezielle Bogenklassen, bei welchen die Fortsetzung der Abbildung möglich ist .....	26
Literatur .....	32

## Einleitung

In der Theorie der konformen Abbildung hat sich das Spiegelungsprinzip, welches von H. A. Schwarz eingeführt worden ist, als ein sehr wichtiges Hilfsmittel erwiesen. Bekanntlich handelt es sich dabei um die Fortsetzung der gegebenen Abbildung über die Randkurve eines Gebietes hinaus. Die Bedingung, unter welcher diese Fortsetzung erlaubt ist, heisst: Die Randbögen sowohl des Bildbereiches als des Urbildbereiches sollen reguläre analytische Kurvenbögen sein. Das Spiegelungsprinzip ist unverändert in die Theorie der quasikonformen Abbildungen übernommen worden. Die Bedingungen für die Fortsetzung sind auch dieselben: Die Bögen müssen analytisch sein. Dann ist die Fortsetzung mit unveränderter maximaler Dilatation gewährt.

Obgleich das Spiegelungsprinzip als Fortsetzungsmethode bei quasikonformen Abbildungen gut anwendbar ist, hat es den Nachteil, dass es nur beim Arbeiten mit analytischen Randbögen zur Verfügung steht. Hat das zu erforschende Gebiet z.B. Ecken, so kann man gewöhnlich bei Eckpunkten keine Fortsetzung mit dieser Methode gewinnen.

Wegen der starken Verallgemeinerung, durch welche die quasikonforme Abbildung aus der konformen Abbildung entsteht, ist jedoch zu erwarten, dass die analytischen Randbögen für die Fortsetzbarkeit eine unnötig enge Kurvenklasse bilden. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, ganz allgemein die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen die Fortsetzung bei quasikonformen Abbildungen über einen Jordanschen Randbogen möglich ist. Dabei wird nicht gefordert, dass die maximale Dilatation der Abbildung unverändert bleibt. Vielmehr wird untersucht, welche neue obere Schranke für die Dilatation der fortgesetzten Abbildung garantiert werden kann.

Die Untersuchung beruht wesentlich auf einigen neueren Resultaten von A. Beurling und L. Ahlfors über das Randverhalten der quasikonformen Abbildungen. Diese sind in § 2 zusammengefasst und für die vorliegende Untersuchung weitergeführt. In § 3 wird die Fortsetzung einer quasikonformen Abbildung von einem Jordangebiet auf die Halbebene zur quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene untersucht. Daraus geht hervor, dass die Fortsetzung auf den Eigenschaften der Begrenzungskurve allein be-

ruht, die fortzusetzende Abbildung spielt dabei keine Rolle. Kurven dieser Art werden mit zwei notwendigen und hinreichenden Bedingungen charakterisiert (Satz 3 und Satz 4).

In § 4 wird ein zu § 3 analoges Fortsetzungsproblem untersucht, und zwar die Fortsetzung über einen freien Jordanbogen hinaus. Auch hier kann man feststellen, dass die Fortsetzung nur auf den Eigenschaften des Bogens beruhend möglich ist (Satz 10). Die Eigenschaft eines Kurvenbogens, eine quasikonforme Fortsetzung zu gestatten, kann man auch im Kleinen aussprechen. Ein Bogen gestattet die Fortsetzung der Abbildung eines am Bogen sich begrenzenden Gebietes über den Bogen bis zu einem anderen Gebiet dann und nur dann, wenn der Bogen in jedem Punkt eine lokale Bedingung erfüllt (Satz 11). Dieses Resultat gilt auch für die in § 3 behandelten Fortsetzungen (Satz 12).

In § 5 werden unter weitgehender Anwendung der Resultate von § 4 spezielle Bogenklassen untersucht. Dabei wird z.B. gefunden, dass ein Kurvenbogen mit stückweise stetiger und beschränkter Krümmung und ohne Nullwinkel eine quasikonforme Fortsetzung gestattet (Satz 17).

Kurz vor der Drucklegung hat der Verfasser dieser Arbeit erfahren, dass einige der mit § 3 verwandten Fragen von A. Pfluger in [10] behandelt worden sind. Pfluger hat durch einige andere Fragestellungen zu genau derselben Kurvenklasse wie wir in § 3 gefunden und diese Kurven als »kreisähnlich« bezeichnet. Die kreisähnlichen Kurven sind dann von ihm mit ungefähr ähnlichen Bedingungen wie hier in § 3 charakterisiert worden. Pfluger beweist auch, dass es nichtrektifizierbare kreisähnliche Kurven gibt.

## § 1. Definition und Grundeigenschaften einer quasikonformen Abbildung

1. Mit *Viereck* sei hier eine Konfiguration bezeichnet, die sich aus einem Jordangebiet, vier verschiedenen Randpunkten desselben und vier von diesen Punkten ausgehend aus dem Rande geschnittenen Seiten zusammensetzt, nachdem wir einem der entgegengesetzten Seitenpaare durch die Bezeichnung »Hauptseitenpaar« eine Sonderstellung verliehen haben. Wenn die zu zwei Vierecken gehörenden Gebiete aufeinander konform abgebildet werden können, derart, dass die Hauptseitenpaare aufeinander abgebildet werden, so sagt man, die Vierecke seien *konformäquivalent*. Nach dieser Eigenschaft wird die Gesamtheit der Vierecke in Äquivalenzklassen eingeteilt: Je zwei Vierecke von derselben Klasse sind aufeinander abzubilden. Es leuchtet ziemlich leicht ein, dass es in jeder Klasse auch euklidische Rechtecke gibt, dessen jedes in seiner Klasse ein konstantes Seitenverhältnis besitzt. Dieses Verhältnis, mit der Länge des Hauptseitenpaares im

Zähler, heisst *Modul* der Vierecke in der entsprechenden Äquivalenzklasse. Der Modul eines Vierecks  $Q$  wird  $M(Q)$  bezeichnet.

Es ist bemerkenswert, dass der Begriff des konformen Moduls nicht nur aus einem speziellen Abbildungsproblem herrührt. Dieser Begriff kann ganz unabhängig von der Theorie der analytischen Funktionen durch den Begriff der extremalen Längen definiert werden. Man könnte sogar im Prinzip — wenn man von den beweistechnischen Schwierigkeiten absieht — die ganze Theorie der konformen Abbildung auf dem Begriff des konformen Moduls aufbauen. Das beruht auf den Satz: *Eine orientierungstreue topologische Abbildung, bei der jedes Viereck des abzubildenden Gebietes seinen Modul behält, ist konform.*

2. In dieser Arbeit werden die *quasikonformen* Abbildungen im Sinne der folgenden geometrischen Definition behandelt: *Eine orientierungstreue topologische Abbildung von dem Gebiet  $G$  auf  $G'$  heisst quasikonform, wenn für jedes in  $G$  gelegene Viereck  $Q$  und das entsprechenden Bildviereck  $Q'$  die Ungleichung*

$$M(Q') \leq K \cdot M(Q)$$

erfüllt ist. Hierbei ist  $K$  eine feste endliche Konstante.

Als *Dilatationsquotient* des Vierecks  $Q$  in der Abbildung sei das Verhältnis

$$D(Q) = M(Q') / M(Q) ,$$

und als *maximale Dilatation* die obere Grenze

$$K(G) = \sup D(Q) ,$$

bezeichnet, wo das Supremum über alle mit ihren Rändern in  $G$  liegenden Vierecke  $Q$  genommen wird. Die Abbildung ist folglich quasikonform, sobald  $K(G)$  endlich ist. Wenn  $K(G) \leq K$  ist, heisst die Abbildung  *$K$ -quasikonform*.

3. Die Quasikonformität der Abbildung kann auch lokal ausgesprochen werden. Es sei  $z$  ein Punkt im Gebiet  $G$  und  $G_z$  ein Teilgebiet von  $G$ , das  $z$  enthält. Nehmen wir alle möglichen Teilgebiete  $G_z$  in Betracht und bilden die untere Grenze

$$K(z) = \inf_{G_z} K(G_z) ,$$

so wird die Grösse  $K(z)$  als die *maximale Dilatation der Abbildung im Punkte  $z$*  bezeichnet. Es kann bewiesen werden, dass

$$K(G) = \sup_{z \in G} K(z) .$$

Wenn wir besonders eine stetig differenzierbare Abbildung  $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  betrachten, deren Funktionaldeterminante bei  $z$  positiv ist, so verhält sich die Abbildung in einer infinitesimalen Umgebung von  $z$  affin. Die lokale maximale Dilatation  $K(z)$  errechnet sich dann explizit aus der Gleichung

$$K(z) + 1/K(z) = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

4. Die Eigenschaften der quasikonformen Abbildungen sind in grossem Umfang analog zu denen der konformen Abbildungen. Die inverse Abbildung ist immer auch quasikonform, eine aus zwei quasikonformen Abbildungen zusammengesetzte Abbildung ist quasikonform, das Spiegelungsprinzip gilt in genau derselben Form wie bei konformen Abbildungen usw. . Über die Eigenschaften der quasikonformen Abbildungen sei auf [1] und [7] verwiesen.

## § 2. Ränderzuordnung bei einer quasikonformen Abbildung

5. Betrachten wir eine quasikonforme Abbildung eines Jordangebietes auf ein anderes Jordangebiet, so kann mit Hilfe einer allgemeinen Verzerrungseigenschaft der quasikonformen Abbildungen (Ahlfors [1]) bewiesen werden, dass die Abbildung bis zum Rande stetig fortgesetzt werden kann.

Es sei nun  $w = w(z)$  eine  $K$ -quasikonforme Selbstabbildung der oberen Halbebene, bei welcher der unendlich ferne Punkt in sich selbst abgebildet wird. Die Ränderzuordnung  $p(x) = w(x)$  dieser Abbildung erfüllt die folgende  $\varrho$ -Bedingung: *Es gibt eine Konstante  $\varrho \geq 1$  derart, dass die Ungleichungen*

$$(1) \quad \frac{1}{\varrho} \leq \frac{p(x+t) - p(x)}{p(x) - p(x-t)} \leq \varrho$$

*gleichmässig für alle reellen Wertepaare  $(x, t)$ ,  $t > 0$ , gelten.* Die Begründung dieses leicht zu beweisenden Resultats ist z.B. in [2] und [8] zu finden. Es ist bemerkenswert, dass man für die Familie der  $K$ -quasikonformen Abbildungen erwähnter Art die optimale Grenze  $\varrho = \lambda(K)$  entdeckt hat.

In der im Jahre 1956 erschienenen Arbeit [2] haben A. Beurling und L. Ahlfors durch eine explizite Konstruktion das bedeutende Resultat bewiesen, dass es für jede wachsende Funktion  $p(x)$ , die auf der ganzen reellen Achse definiert ist und die  $\varrho$ -Bedingung erfüllt, eine quasikonforme Selbstabbildung der oberen Halbebene mit der Ränderzuordnung  $p(x)$  gibt. Ihre Konstruktion ist folgende:  $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ , wo

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^1 [p(x + ty) + p(x - ty)] dt,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2} r \int_0^1 [p(x + ty) - p(x - ty)] dt.$$

Mit geeigneter Wahl des Parameters  $r$  können sie beweisen, dass man immer eine  $\varrho^2$ -quasikonforme Abbildung gesuchter Art finden kann. Die Grenze  $\varrho^2$  für die maximale Dilatation ist nicht die Bestmögliche, eine solche Grenze ist bis heute unbekannt.

Zusammengefasst erhalten wir den

**Satz 1.** *Es gibt eine quasikonforme Selbstabbildung der oberen Halbebene mit der reellwertigen Ränderzuordnung  $u = p(x)$  genau dann, wenn die Funktion  $p(x)$  die  $\varrho$ -Bedingung erfüllt.*

6. Es sei nun  $w(z)$  eine beliebige quasikonforme Abbildung der oberen Halbebene auf sich selbst. Das Verhalten einer solchen Abbildung am Rande lässt sich mit einer ähnlichen Bedingung wie im Falle des unendlich fernen Fixpunktes charakterisieren. In jedem Intervalle  $a \leq x \leq b$ , in dem die Randabbildungsfunktion endlich bleibt, ist nämlich die folgende Randbedingung erfüllt:

*Es gibt eine Konstante  $\varrho \geq 1$  derart, dass die Ungleichungen (1) für alle reellen Wertepaare  $(x, t)$ ,  $t > 0$ , gelten, bei denen die Werte  $x$ ,  $x + t$ ,  $x - t$  im Intervalle  $(a, b)$  liegen.*

Zum Beweis benutzen wir Satz 1. Es sei  $p_0$  derjenige Punkt der reellen Achse, auf den der unendlich ferne Punkt abgebildet wird. Der Punkt  $p_0$  liegt ausserhalb des Intervalls  $p(a) \leq u \leq p(b)$ , und folglich hat die lineare Transformation  $L(w) = -1/(w - p_0)$ , welche eine Selbstabbildung der oberen Halbebene ist, in diesem Intervall eine stetige reellwertige Ableitung, die von Null verschieden ist. Die Ableitung hat im genannten Intervall ein endliches Maximum bzw. Minimum,  $M$  bzw.  $m$ . Die zusammengesetzte Abbildung  $L(w(z))$  hält den unendlich fernen Punkt fest und gemäss Satz 1 kann man eine Zahl  $\varrho$  derart finden, dass die Ungleichungen

$$\frac{1}{\varrho} \leq \frac{L(w(x+t)) - L(w(x))}{L(w(x)) - L(w(x-t))} \leq \varrho$$

gelten. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ergibt, wenn  $a \leq x \pm t \leq b$  ist:

$$L(w(x+t)) - L(w(x)) = L'(\xi_1) (w(x+t) - w(x)),$$

$$L(w(x)) - L(w(x-t)) = L'(\xi_2) (w(x) - w(x-t)).$$

Hierbei gelten die Ungleichungen  $m \leq L'(\xi_r) \leq M$ ,  $r = 1, 2$ . Somit sind im Intervalle  $(a, b)$  die Ungleichungen

$$\frac{m}{M\varrho} \leq \frac{w(x+t) - w(x)}{w(x) - w(x-t)} \leq \frac{M\varrho}{m}$$

erfüllt.

Wenn umgekehrt eine wachsende Funktion  $p(x)$  gegeben ist, welche die  $\varrho$ -Bedingung im Intervall  $a \leq x \leq b$  erfüllt, so kann man eine Selbstabbildung der oberen Halbebene konstruieren, die in  $a \leq x \leq b$  mit  $p(x)$  zusammenfällt. Das ist eine unmittelbare Folge der Tatsache, dass es möglich ist, eine  $\varrho$ -Fortsetzung für die Funktion  $p(x)$  zu finden, d.h. eine auf der ganzen reellen Achse definierte Funktion, die dort eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt und im Intervall  $a \leq x \leq b$  mit  $p(x)$  zusammenfällt. Dieses Resultat stammt von O. Lehto und K. I. Virtanen [8], die dafür eine explizite Konstruktion angeben. Sie geben jedoch keinen Beweis. Da unsere späteren Betrachtungen ganz wesentlich auf diesem Resultat aufbauen, sei hier ein Beweis zur Gültigkeit ihrer Konstruktion gegeben.

Es sei im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  eine, durch  $p(0) = 0$ ,  $p(1) = 1$  normierte, wachsende reellwertige Funktion  $p(x)$  gegeben. Lehto und Virtanen bilden eine auf der ganzen reellen Achse definierte Funktion  $P(x)$ , indem sie

$$(2) \quad \begin{cases} P(x) = p(x), & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ P(x) = -p(-x), & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ P(x) = P(x-2n) + 2n, & \text{für } 2n-1 \leq x \leq 2n+1 \end{cases}$$

setzen. Wenn die Funktion  $p(x)$  im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  eine  $\varrho$ -Bedingung mit  $\varrho = \varrho_p$  erfüllt, dann ist für  $P(x)$  eine (andere)  $\varrho$ -Bedingung auf der ganzen reellen Achse erfüllt.

Der Beweis dieses Resultats ist ziemlich umständlich. Am mühsamsten ist das Zusammenfügen der Fortsetzung mit der ursprünglichen Funktion in den Punkten  $x = 0$  und  $x = 1$ .

Um obere und untere Schranken für den Ausdruck

$$q(x, t) = \frac{P(x+t) - P(x)}{P(x) - P(x-t)}$$

zu finden, suchen wir zunächst Abschätzungen für  $q(x, t)$  in den drei Sonderfällen:

$$A. \quad 0 \leq x+t \leq 1, \quad 0 \leq x-t \leq 1, \quad 0 < t \leq 1/3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$B. \quad 0 \leq x+t \leq 1, \quad -1 \leq x-t \leq 0, \quad 0 < t \leq 1/3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$C. \quad 1 \leq x+t \leq 2, \quad 0 \leq x-t \leq 1, \quad 0 < t \leq 1/3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Im Falle  $A$  ist immer  $P(x) = p(x)$ , so dass wegen der Eigenschaft der Funktion  $p(x)$

$$(3) \quad \frac{1}{\varrho_p} \leq q(x, t) \leq \varrho_p.$$

Im Falle  $B$  ist wegen (2)

$$q(x, t) = \frac{p(x+t) - p(x)}{p(x) + p(t-x)}.$$

Unsere Methode der Abschätzung ist von den Grössenverhältnissen der  $x$  und  $t$  abhängig. Ist  $x \leq t \leq 2x$ , so erhält man

$$q(x, t) \leq \frac{p(3x) - p(x)}{p(x)} = \left[ \frac{p(3x) - p(2x)}{p(2x) - p(x)} + 1 \right] \left[ \frac{p(2x) - p(x)}{p(x)} \right] \leq \varrho_p(\varrho_p + 1),$$

$$q(x, t) \geq \frac{p(2x) - p(x)}{2p(x)} \geq \frac{1}{2\varrho_p}.$$

Ist aber  $t \geq 2x$ , so wird

$$q(x, t) \leq \frac{p(3t/2) - p(t)}{p(t/2)} = \left[ \frac{p(3t/2) - p(t)}{p(t) - p(t/2)} + 1 \right] \left[ \frac{p(t) - p(t/2)}{p(t/2)} \right] + 1 \leq \varrho_p^2 + \varrho_p + 1,$$

$$q(x, t) \geq \frac{p(t) - p(t/2)}{p(t) + p(t/2)} = \frac{1}{1 + 2 \frac{p(t/2)}{p(t) - p(t/2)}} \geq \frac{1}{1 + 2\varrho_p}.$$

Jedenfalls haben wir im Falle  $B$  die Schranken

$$(4) \quad \frac{1}{1 + 2\varrho_p} \leq q(x, t) \leq \varrho_p^2 + \varrho_p + 1.$$

Im Falle  $C$  erhält der Ausdruck  $q(x, t)$  wegen (2) die Form

$$q(x, t) = \frac{2 - p(2-x-t) - p(x)}{p(x) - p(x-t)}.$$

Die Abschätzung kann hier mit Hilfe des Resultats (4) ausgeführt werden. Dafür bemerken wir, dass die Funktion  $\bar{p}(x) = 1 - p(1-x)$  genau dieselbe  $\varrho$ -Bedingung im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  erfüllt, wie unsere Funktion  $p(x)$ . Umgekehrt ist  $p(x) = 1 - \bar{p}(1-x)$ . Wenn wir noch  $\bar{x} = 1-x$  bezeichnen, so haben wir

$$\frac{1}{q(x, t)} = \frac{\bar{p}(\bar{x}+t) - \bar{p}(\bar{x})}{\bar{p}(\bar{x}) + \bar{p}(t-\bar{x})},$$

und die Ungleichungen  $C$  erhalten nun die Form

$$C' : 0 \leq \bar{x} + t \leq 1, \quad -1 \leq \bar{x} - t \leq 0, \quad 0 < t \leq 1/3, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1.$$

Wenn man im Falle *B* die Variable  $x$  und die Funktion  $p(x)$  mit  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{p}(\bar{x})$  ersetzt, sieht man, dass das Resultat (4) anwendbar ist, und man erhält

$$(5) \quad \frac{1}{\varrho_p^2 + \varrho_p + 1} \leq q(x, t) \leq 1 + 2\varrho_p.$$

Vorläufig haben wir in den Resultaten (3), (4) und (5) Abschätzungen für  $q(x, t)$  in einem kleineren Gebiet der  $(x, t)$ -Ebene bekommen (vgl. Abb. 1). Weil immer  $\varrho_p \geq 1$ , gelten im Gebiete  $0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq 1/3$  die Ungleichungen

$$(6) \quad \frac{1}{3\varrho_p^2} \leq q(x, t) \leq 3\varrho_p^2.$$

Dieses Resultat erlaubt uns, Abschätzungen für  $q(x, t)$  in der gesamten  $(x, t)$ -Ebene aufzustellen.

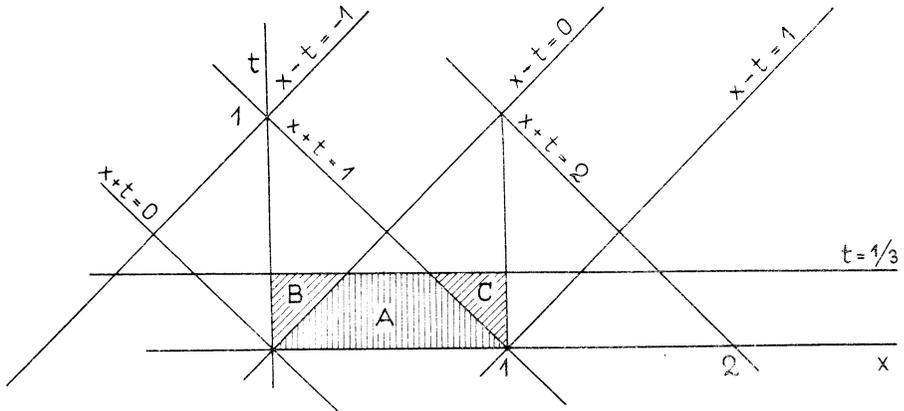


Abb. 1.

Aus der Definition der  $P(x)$  folgt, dass die Funktionalgleichungen  $P(-x) = -P(x)$ ,  $P(x+2) = P(x) + 2$  erfüllt sind. Folglich gelten für  $q(x, t)$  die Gleichungen

$$(7) \quad q(-x, t) = \frac{1}{q(x, t)}, \quad q(x+2, t) = q(x, t).$$

Mit Hilfe der Beziehungen (7) sieht man, dass die Abschätzungen (6) für jeden Wert von  $x$  gelten, wenn nur  $0 < t \leq 1/3$  ist.

Um Abschätzungen für  $q(x, t)$  für beliebige  $t$ -Werte zu bekommen, gehen wir folgendermassen vor: Bezeichnen wir

$$\Delta(x) = P(x + 1/3) - P(x),$$

so gilt die Identität

$$(8) \quad P(x + 2) - P(x) = \sum_{k=0}^5 \Delta(x + k/3) = 2.$$

Andererseits gilt, weil

$$q(x + 1/3, 1/3) = \frac{\Delta(x + 1/3)}{\Delta(x)},$$

nach (6) die Ungleichung

$$\Delta(x + 1/3) \leq 3\varrho_p^2 \Delta(x).$$

Man sieht auch, dass allgemeiner

$$(9) \quad \Delta(x + k/3) \leq (3\varrho_p^2)^k \Delta(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

In Verbindung mit (9) ergibt die Identität (8)

$$2 \leq \Delta(x) \sum_{k=0}^5 (3\varrho_p^2)^k \leq \Delta(x) \cdot 6 \cdot (3\varrho_p^2)^5$$

und schliesslich

$$\frac{1}{3^6 \varrho_p^{10}} \leq \Delta(x) \leq 2.$$

Ist nun  $n/3 < t \leq (n+1)/3$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , so gilt für jedes  $x$

$$P(x + t) - P(x) \leq \sum_{k=0}^n \Delta(x + k/3) \leq 2(n + 1),$$

$$P(x + t) - P(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(x + k/3) \geq \frac{n}{3^6 \varrho_p^{10}},$$

woraus zu ersehen ist, dass

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^6 \cdot \varrho_p^{10}} \leq q(x, t) \leq \frac{n+1}{n} \cdot 2 \cdot 3^6 \cdot \varrho_p^{10}.$$

Weil  $(n+1)/n \leq 2$  für  $n \geq 1$ , gilt also unabhängig von  $t$

$$\frac{1}{2916 \varrho_p^{10}} \leq q(x, t) \leq 2916 \varrho_p^{10}.$$

Die Behauptung, dass die aus  $p(x)$  durch den Fortsetzungsprozess (2) gewonnene Funktion  $P(x)$  einer  $\varrho$ -Bedingung auf der ganzen reellen Achse genügt, ist somit bewiesen. Zugleich ist auch der folgende Satz begründet:

**Satz 2.** Eine wachsende im Intervall  $a \leq x \leq b$  definierte, reelle Funktion  $p(x)$  ist dann und nur dann ein Teil der Randabbildung einer quasikonformen Selbstabbildung der oberen Halbebene, wenn  $p(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  eine  $q$ -Bedingung erfüllt.

### § 3. Fortsetzung einer quasikonformen Abbildung eines Jordangebietes in die ganze Ebene

7. Betrachten wir nun eine Jordankurve  $C$  in der abgeschlossenen  $z$ -Ebene. Die Kurve  $C$  zerlegt die Ebene in zwei punktfremde einfach zusammenhängende Gebiete  $G_1$  und  $G_2$ . Es sei eine quasikonforme Abbildung  $W(z)$  gegeben, die das Gebiet  $G_1$  auf die obere  $w$ -Halbebene abbildet. Wir wollen zunächst untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die vorgegebene Abbildung  $W(z)$  zu einer quasikonformen Abbildung der gesamten  $z$ -Ebene fortgesetzt werden kann. Dabei gestatten wir, dass die maximale Dilatation der fortgesetzten Abbildung grösser ist als diejenige der ursprünglichen Abbildung.

Da es sich um eine quasikonforme Abbildung zwischen zwei Jordangebieten handelt, kann  $W(z)$  zu einem Homöomorphismus zwischen den entsprechenden abgeschlossenen Gebieten erweitert werden, d.h. die Abbildung ist stetig bis zum Rande und definiert zugleich eine stetige<sup>1)</sup> eindeutige Abbildung zwischen der Kurve  $C$  und der  $u$ -Achse ( $w = u + iv$ ). Wir bezeichnen mit  $z_0$  den Punkt der Kurve  $C$ , der auf  $w = \infty$  abgebildet wird.

Wir bilden weiter die zwei Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  konform auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene mit den Abbildungsfunktionen  $S_1(z)$  bzw.  $S_2(z)$  ab. Dabei wählen wir die bis zum Rande stetigen Funktionen  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$  so, dass  $S_1(z_0) = S_2(z_0) = \infty$  ist. Die vorgegebene quasikonforme Abbildung  $W(z)$  kann dann als das Abbildungsprodukt  $W(z) = (WS_1^{-1})S_1(z) = T_1S_1(z)$  dargestellt werden. Hierbei ist  $T_1(w) = WS_1^{-1}(w)$  eine quasikonforme Selbstabbildung der oberen  $w$ -Halbebene, bei welcher der Punkt  $w = \infty$  in sich selbst übergeht.

Nun sei angenommen, dass die Abbildung  $W(z)$  zu einer quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene fortgesetzt werden kann. Die angenommene Fortsetzung ist dann eine Abbildung des Gebietes  $G_2$  auf die untere  $w$ -Halbebene, und diese ist als eine zusammengesetzte Abbildung aus der konformen Abbildung  $S_2(z)$  und einer quasikonformen Selbstabbildung  $T_2(w)$  der unteren Halbebene darstellbar. Auf der Kurve  $C$  muss

<sup>1)</sup> Die Stetigkeit ist hier wie auch später in dieser Arbeit im Sinne der sphärischen Metrik zu verstehen.

notwendig  $T_1 S_1(z) = T_2 S_2(z)$ , oder auf der  $u$ -Achse  $S_1 S_2^{-1} = T_1^{-1} T_2$  sein. Die Abbildungen  $T_1^{-1}$  und  $T_2$  sind quasikonforme Selbstabbildungen der oberen bzw. unteren Halbebenen, die den Punkt  $w = \infty$  festhalten. Satz 1 gemäss erfüllen  $T_1^{-1}$  und  $T_2$  auf der reellen Achse je eine  $\varrho$ -Bedingung. Es ist somit<sup>1)</sup> eine notwendige Voraussetzung für die quasikonforme Fortsetzbarkeit, dass *die Selbstabbildung  $S_1 S_2^{-1}$  der  $u$ -Achse eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt.*

Das gefundene Resultat ist umkehrbar: Die erwähnte Voraussetzung ist auch hinreichend. Nehmen wir nämlich an, dass die Funktion  $S_1 S_2^{-1}$  eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt, so genügt auch die Randabbildung  $A(u) = T_1 S_1 S_2^{-1}(u)$  einer  $\varrho$ -Bedingung. Dann können wir mit der Methode von Beurling und Ahlfors eine quasikonforme Selbstabbildung  $A(w)$  der unteren Halbebene konstruieren, welche die gegebene Randabbildung  $A(u)$  enthält. Die Abbildung  $AS_2(z)$  gibt uns dann die gesuchte Fortsetzung der Funktion  $W(z)$ : Auf der Jordankurve  $C$  besteht die Identität  $W(z) = AS_2(z)$ , und die vorliegende Abbildung der gesamten  $z$ -Ebene ist also topologisch. Die Inverse dieser Abbildung ist in der oberen und unteren  $w$ -Halbebene quasikonform. Auf der reellen Achse kennen wir nicht unmittelbar das Verhalten ihrer lokalen maximalen Dilatation. Aus einem grundlegenden Satz der Theorie der quasikonformen Abbildungen (Ahlfors [1]) folgt aber, dass ihre maximale Dilatation auch auf der reellen Achse beschränkt ist, und unter derselben Schranke liegt wie auf der oberen und unteren Halbebene. Die inverse Abbildung ist also quasikonform und somit auch die betrachtete Abbildung.

Das Bestehen der gefundenen, notwendigen und hinreichenden Bedingung, wonach  $S_1 S_2^{-1}$  eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllen muss, ist eine Eigenschaft der Jordankurve  $C$ . Wenn diese Bedingung besteht, kann man jede quasikonforme Abbildung des Gebietes  $G_1$  auf die obere Halbebene, bei der das Urbild des Punktes  $w = \infty$  gleich  $z_0$  ist, zu einer Abbildung der ganzen  $z$ -Ebene fortsetzen. Die Forderung, dass das Urbild des Punktes  $w = \infty$  gleich  $z_0$  sein muss, ist jedoch unwesentlich. Nehmen wir an die obenerwähnte Fortsetzung über die Jordankurve  $C$  sei möglich für alle diejenigen quasikonformen Abbildungen, bei denen das Urbild des Punktes  $w = \infty$  gleich  $z = z_0$  ist. Es sei  $z = z_1 \neq z_0$  ein Punkt auf  $C$  und  $W(z)$  eine quasikonforme Abbildung von  $G_1$  auf die obere  $w$ -Halbebene derart, dass  $W(z_1) = \infty$  und  $W(z_0) = w_0 \neq \infty$ . Die quasikonforme Abbildung  $LW(z)$ , wo  $L(w) = -1/(w - w_0)$ , bildet den Punkt  $z = z_0$  auf  $w = \infty$  ab, und sie kann deshalb zu einer quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene fortgesetzt werden. Nach der Fort-

<sup>1)</sup> Die zusammengesetzte Funktion zweier die  $\varrho$ -Bedingung erfüllenden Funktionen erfüllt auch die  $\varrho$ -Bedingung, wie man leicht mit Hilfe des Satzes 1 sieht.

setzung bilden wir noch die  $w$ -Ebene mit Hilfe der linearen Transformation  $L^{-1}(w)$  auf sich selbst ab. So haben wir eine quasikonforme Abbildung der gesamten  $z$ -Ebene gewonnen, die im Gebiete  $G_1$  mit der Abbildung  $W(z)$  zusammenfällt, d.h. eine Fortsetzung der gewünschten Art.

Wir untersuchen noch grob, wie weit die maximale Dilatation einer  $K$ -quasikonformen Abbildung  $W(z)$  in unserem Fortsetzungsprozess wachsen kann. Dazu befassen wir uns nochmals mit dem entscheidenden Schritt, der Konstruktion der quasikonformen Selbstabbildung der unteren  $w$ -Halbebene mit der Ränderzuordnung  $A(u) = T_1 S_1 S_2^{-1}(u)$ . Unserer Annahme gemäss erfüllt die Funktion  $S_1 S_2^{-1}$  die  $\varrho$ -Bedingung mit einem endlichen Wert  $\varrho = \varrho_C$ . Dann gibt es nach Beurling und Ahlfors eine  $\varrho_C^2$ -quasikonforme Abbildung der unteren Halbebene mit der Randabbildung  $S_1 S_2^{-1}(u)$ . Die quasikonforme Selbstabbildung  $T_1$  der oberen Halbebene kann zu einer  $K$ -quasikonformen Selbstabbildung der unteren Halbebene mit Hilfe des Spiegelungsprinzips fortgesetzt werden. Als eine zusammengesetzte Abbildung der zwei letztgenannten quasikonformen Abbildungen gewinnen wir die gesuchte Selbstabbildung der unteren Halbebene mit der Randabbildung  $A(u)$ . Mit dieser Methode können wir also wenigstens eine  $K\varrho_C^2$ -quasikonforme Fortsetzung finden.

Zusammenfassend wurde bewiesen

**Satz 3.** *Die  $z$ -Ebene sei von einer Jordankurve  $C$  in zwei Teilgebiete  $G_1$  und  $G_2$  zerlegt, die durch  $S_1(z)$  bzw.  $S_2(z)$  konform<sup>1)</sup> auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene derart abgebildet sind, dass  $S_1^{-1}(\infty) = S_2^{-1}(\infty)$ . Eine quasikonforme Abbildung von  $G_1$  auf die obere Halbebene kann dann und nur dann zu einer quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene fortgesetzt werden, wenn die Kurve  $C$  so beschaffen ist, dass die Funktion  $S_1 S_2^{-1}$  auf der reellen Achse eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt. Wenn die fortzusetzende Abbildung in  $G_1$   $K$ -quasikonform ist und  $S_1 S_2^{-1}$  die  $\varrho$ -Bedingung mit  $\varrho = \varrho_C$  erfüllt, so gibt es eine  $K\varrho_C^2$ -quasikonforme Fortsetzung.*

8. Sei nun  $C$  eine Jordankurve, die eine Fortsetzung im Sinne des Satzes 3 gestattet. Die Kurve  $C$  kann dann also als Bild der reellen Achse in einer quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene aufgefasst werden.

Wir betrachten umgekehrt eine Jordankurve  $C$ , die als Bild der reellen Achse in einer quasikonformen Abbildung  $U(w)$  der ganzen Ebene darstellbar ist. Da die Inverse dieser Abbildung über die Kurve  $C$  fortgesetzt werden kann, genügt  $C$  den im Satze 3 erwähnten Voraussetzungen. Jede quasikonforme Abbildung  $W(z)$  von dem durch  $C$  begrenzten Gebiet  $G_1$  auf die obere Halbebene kann somit zu einer quasikonformen Selbstab-

<sup>1)</sup> Die qualitative Aussage des Satzes 3 gilt auch, wenn die Abbildungen  $S_1$  und  $S_2$  quasikonform sind.

bildung der gesamten Ebene fortgesetzt werden. Unser Fortsetzungsprozess kann in diesem Fall so modifiziert werden, dass sich auch eine Abschätzung für die maximale Dilatation der fortgesetzten Abbildung gewinnen lässt.

Die durch  $C$  berandeten Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  seien konform auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene durch  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$  so abgebildet, dass der Punkt  $W^{-1}(\infty)$  in  $w = \infty$  übergeht. Die Inverse der  $K_C$ -quasikonformen Abbildung  $U(w)$  vermittelt Abbildungen von  $G_1$  und  $G_2$  auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene. Diese seien als Abbildungsprodukte  $T_{1C}S_1(z)$  und  $T_{2C}S_2(z)$  bezeichnet, wo  $T_{1C}$  und  $T_{2C}$   $K_C$ -quasikonforme Selbstabbildungen der oberen bzw. unteren Halbebene sind.

Wir stellen  $W(z)$  als Abbildungsprodukt  $T_1S_1(z)$  dar, wo  $T_1$  eine  $K$ -quasikonforme Selbstabbildung der oberen Halbebene ist. Um die Abbildung  $W(z)$  zu einer quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene fortzusetzen, haben wir die Randabbildung  $A(u) = T_1S_1S_2^{-1}(u)$  zu einer quasikonformen Selbstabbildung der unteren Halbebene fortzusetzen. Dafür suchen wir erstens eine quasikonforme Selbstabbildung der unteren Halbebene mit der Randabbildung  $S_1S_2^{-1}$ : Wir bemerken, dass auf der Kurve  $C$  identisch  $T_{1C}S_1(z) = T_{2C}S_2(z)$ , oder auf der reellen Achse  $S_1S_2^{-1} = T_{1C}^{-1}T_{2C}$ . Spiegeln wir  $T_{1C}^{-1}$  zu einer  $K_C$ -quasikonformen Selbstabbildung der unteren Halbebene, so haben wir in  $T_{1C}^{-1}T_{2C}$  eine  $K_C^2$ -quasikonforme Selbstabbildung der unteren Halbebene mit der Randabbildung  $S_1S_2^{-1}$ . Schliesslich spiegeln wir noch  $T_1$  zu einer  $K$ -quasikonformen Selbstabbildung der unteren Halbebene, und wir haben in  $A(w) = T_1T_{1C}^{-1}T_{2C}(w)$  die gewünschte Fortsetzung von  $A(u)$ . Die Fortsetzung der Abbildung  $W(z)$  wird in  $G_2$  mit  $AS_2(z) = T_1T_{1C}^{-1}T_{2C}S_2(z)$  gegeben und ist somit  $KK_C^2$ -quasikonform.

Als Zusammenfassung der obigen Resultate erhält man

**Satz 4.** *Eine quasikonforme Abbildung von einem Jordangebiet auf die Halbebene kann dann und nur dann zu einer quasikonformen Abbildung der gesamten Ebene fortgesetzt werden, wenn die Begrenzungskurve des Gebietes das Bild einer Geraden (oder eines Kreises) in irgendeiner quasikonformen Abbildung der gesamten<sup>1)</sup> Ebene ist. Wenn die Begrenzungskurve in einer  $K_C$ -quasikonformen Abbildung aus einer Gerade erzeugt wird und die fortzusetzende Abbildung  $K$ -quasikonform ist, so kann man eine  $KK_C^2$ -quasikonforme Fortsetzung finden.*

9. Aus den obigen Sätzen 3 und 4 geht hervor, dass eine quasikonforme Abbildung eines Jordangebietes auf die Halbebene genau dann zu einer

<sup>1)</sup> Zur Verschärfung des Satzes 4 siehe S. 26, wo gezeigt wird, dass der erste Teil des Satzes schon dann gilt, wenn die betrachtete Jordankurve als Bild eines Kreises in einer quasikonformen Abbildung eines beliebigen Gebietes erzeugt wird.

quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene fortgesetzt werden kann, wenn die Begrenzungskurve von einer gewissen, in den Sätzen genauer ausgesprochen Art ist. Es handelt sich also um eine Eigenschaft der Begrenzung, während die betrachtete spezielle quasikonforme Abbildung keinen Einfluss auf die Fortsetzbarkeit ausübt. Die Kurven dieser Art werden im folgenden nur kurz als *Kurven, die eine quasikonforme Fortsetzung gestatten*, bezeichnet.

Der Sachverhalt sei durch Betrachtungen in der Klasse der konformen Abbildungen beleuchtet. Dort sind die Abbildungen der ganzen Ebene lineare Transformationen. Die Begrenzungen derjenigen Gebiete, deren konforme Abbildungen auf die Halbebene sich zu konformen Abbildungen der ganzen Ebene fortsetzen lassen, sind Kreise oder Geraden. Bei konformen Abbildungen sind Kreise und Geraden somit die einzigen Kurven, die eine Fortsetzung gestatten.

Der Wertevorrat der fortzusetzenden Abbildung ist bisher die obere Halbebene gewesen. Diese Beschränkung ist jedoch eine unwesentliche Normierung. Etwas allgemeiner gilt

**Satz 5.** *Das Jordangebiet  $F$  sei von einer Kurve  $D$  begrenzt, welche eine quasikonforme Fortsetzung gestattet. Ein anderes Gebiet  $G$  mit der Begrenzungskurve  $C$  sei auf  $F$  quasikonform abgebildet. Will man diese Abbildung zu einer quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene fortsetzen, so ist dafür die notwendige und hinreichende Bedingung, dass die Kurve  $C$  eine quasikonforme Fortsetzung gestattet.*

*Beweis:* Die Notwendigkeit ist offensichtlich, weil nach Satz 4 das quasikonforme Bild einer Kurve, die eine quasikonforme Fortsetzung gestattet, auch eine quasikonforme Fortsetzung gestattet. Der zweite Teil des Satzes wird mit der folgenden Konstruktion bewiesen: Wir bilden das Gebiet  $F$  konform auf die obere Halbebene ab. Zugleich erhalten wir eine quasikonforme Abbildung von  $G$  auf dieselbe Halbebene. Diese beiden Abbildungen, deren Wertevorrat die Halbebene ist, sind Satz 3 gemäss zu quasikonformen Abbildungen der ganzen Ebene fortsetzbar. Als Abbildungsprodukt der letztgenannten und der Inverse der erstgenannten erhalten wir die gesuchte Fortsetzung.

Aus der obigen Konstruktion ergeben sich auch Abschätzungen für die maximale Dilatation der fortgesetzten Abbildung. Wenn wir die Bezeichnungen der Sätze 3 und 4 anwenden, können wir als obere Schranken  $KK_C^2 K_D^2$ ,  $KK_C^2 \varrho_D^2$ ,  $K\varrho_C^2 K_D^2$  oder  $K\varrho_C^2 \varrho_D^2$  angeben.

10. Um unseren Fortsetzungsprozess mit dem Spiegelungsprinzip zu vergleichen, betrachten wir den Fall, in dem die Begrenzungskurve  $C$  des Gebietes ein Kreis ist. Dies ist der einzige Fall, in dem die Abbildung mit dem Spiegelungsprinzip direkt zur Abbildung der ganzen Ebene fortgesetzt

werden kann. Der Kreis  $C$  kann aus der reellen Achse mit einer linearen Transformation erzeugt werden, also ist die Konstante  $K_C = 1$ . Satz 4 gemäss ist, in Übereinstimmung mit dem Spiegelungsprinzip, eine Fortsetzung mit unveränderter maximaler Dilatation möglich.

Die in unserem Fortsetzungsprozess angewandten Hilfsabbildungen  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$  können jetzt mit derselben linearen Transformation ausgeführt werden. Die Selbstabbildung der reellen Achse  $S_1S_2^{-1}$  ist folglich eine Identität und dieselbe kann zur identischen Selbstabbildung der unteren Halbebene fortgesetzt werden. Die quasikonforme Selbstabbildung  $A(w)$  der unteren Halbebene kann man dann direkt durch Spiegelung von  $T_1$ , der Selbstabbildung der oberen Halbebene, gewinnen. Die lineare Transformation bewahrt die Spiegelbildrelation, also kann die Fortsetzung  $AS_2(z)$  der quasikonformen Abbildung  $W(z) = T_1S_1(z)$  durch eine simultane Spiegelung in Argumenten- und Funktionsebenen erhalten werden. Das Spiegelungsprinzip ist somit in Fortsetzungen dieser Art als ein Spezialfall im Fortsetzungsprozess enthalten.

#### § 4. Fortsetzung einer quasikonformen Abbildung über einen freien Jordanbogen

11. Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei punktfremde einfach zusammenhängende Gebiete, deren Begrenzungen einen gemeinsamen offenen freien<sup>1)</sup> Jordan-schen Kurvenbogen  $C$  besitzen. Wir bilden  $G_1$  und  $G_2$  konform durch  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$  auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene ab. Dabei seien  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$  so gewählt, dass beide den Bogen  $C$  auf dasselbe endliche Intervall  $a < u < b$  der  $\text{Re } w$ -Achse abbilden.

Es sei eine quasikonforme Abbildung  $W(z)$  von  $G_1$  auf die obere  $w$ -Halbebene gegeben. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die Abbildung  $W(z)$  zur quasikonformen Abbildung des Gebietes  $G_1 \cup C \cup G_2$  auf die längs  $-\infty < u < a$  und  $b < u < \infty$  aufgeschnittene  $w$ -Ebene fortgesetzt werden kann.

Mit einer zum Anfang des § 3 analogen Beweisführung beweist man durch Ersetzen des dort angewandten Satzes 1 durch Satz 2 den

**Satz 6.** *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Fortsetzbarkeit einer quasikonformen Abbildung  $W(z)$  von  $G_1$  auf die obere  $w$ -Halbebene zu einer quasikonformen Abbildung von  $G_1 \cup C \cup G_2$  auf die aufgeschnittene  $w$ -Ebene ist, dass die Funktion  $S_1S_2^{-1}(u)$  auf dem Intervall  $a < u < b$  eine  $q$ -Bedingung erfüllt.*

<sup>1)</sup> Zum Begriff des freien Jordanbogens vergleiche Carathéodory [3] S. 91.

Der obige Satz ist analog zu Satz 3 in § 3. Der zu Satz 4 analoge Satz lautet hier folgendermassen:

**Satz 7.** Die von  $w = \infty$  bis  $w = a$  und  $w = b$  aufgeschnittene  $w$ -Ebene sei  $K_0$ -quasikonform auf ein Gebiet  $G$  abgebildet, in dem der Bildbogen  $C$  der Strecke  $a < u < b$  das Gebiet  $G$  in zwei Teilgebiete  $G_1$  und  $G_2$  zerlegt. Es sei weiter  $W(z)$  eine beliebige  $K$ -quasikonforme Abbildung von  $G_1$  auf die obere  $w$ -Halbebene. Dann kann  $W(z)$  zu einer  $KK_0^2$ -quasikonformen Abbildung von  $G$  auf die aufgeschnittene  $w$ -Ebene fortgesetzt werden.

12. Die Brauchbarkeit der Sätze 6 und 7 ist beschränkt, weil die Fortsetzbarkeit einer quasikonformen Abbildung abhängig von den Eigenschaften von  $G_1$ ,  $G_2$  und  $C$  ist. Mit verschiedenen Gebietspaaren  $G_1$ ,  $G_2$  und mit demselben Bogen  $C$  kann die Fortsetzung einmal möglich, ein ander Mal unmöglich sein. Eine genauere Überlegung zeigt, dass es davon abhängt, wie die übrigen Teile der Gebietsränder von  $G_1$  und  $G_2$  mit dem gemeinsamen Teil  $C$  zusammengefügt sind. Um zur Analogie mit der Lehre der konformen Abbildungen und analytischen Kurvenbögen oder i.a.W. zur Charakterisierung der Fortsetzbarkeit nur mit Hilfe der Eigenschaften des Jordanbogens  $C$  zu gelangen, führen wir weitere Begriffe ein.

Es sei  $C'$  ein beliebiger offener Teilbogen von  $C$ , der bis zu seinen Endpunkten in  $C$  liegt. Wir sagen, die quasikonforme Abbildung  $W(z)$  von  $G_1$  auf die obere  $w$ -Halbebene sei *fortsetzbar über die kompakten Teile der offenen Jordanbogen  $C$*  ins Gebiet  $G_2$ , wenn  $W(z)$  sich für jeden  $C'$  zu einer quasikonformen Abbildung von  $G_1 \cup C' \cup G_2$  auf die aufgeschnittene  $w$ -Ebene fortsetzen lässt. Nach den vorigen Sätzen 6 und 7 ist diese Eigenschaft des Bogens  $C$  unabhängig von der Wahl der fortzusetzenden quasikonformen Abbildung  $W(z)$ . Sie ist auch unabhängig von der Wahl der Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  und ist somit allein eine Eigenschaft des Kurvenbogens  $C$ . Dieses geht aus dem folgenden Resultat hervor:

**Satz 8.** Zwei punktfremde einfach zusammenhängende Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  haben einen offenen freien Jordanbogen  $C$  in ihren Begrenzungen gemeinsam. Das Gebiet  $G_1$  sei quasikonform mit einer Abbildungsfunktion  $W(z)$  auf die obere Halbebene abgebildet. Dann ist die quasikonforme Fortsetzbarkeit der Abbildung über die kompakten Teile der Kurve  $C$  ins Gebiet  $G_2$  unabhängig von der speziellen Wahl der Gebiete  $G_1$ ,  $G_2$  und der zugehörigen Abbildung  $W(z)$ .

*Beweis:* Angenommen die Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  seien auf zwei verschiedene Weisen gewählt: Die Gebietspaare  $G'_1$ ,  $G'_2$  und  $G''_1$ ,  $G''_2$ . Um den vorliegenden Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass sich eine quasikonforme Abbildung  $W_1(z)$  von  $G'_1$  auf die obere  $w$ -Halbebene genau dann über die kompakten Teile des Randbogens  $C$  in das Gebiet  $G'_2$  fortsetzen

lässt, wenn wir eine andere quasikonforme Abbildung  $W_2(z)$  aus  $G''$  auf die obere Halbebene über die kompakten Teile des Randbogens  $C$  in das Gebiet  $G_1''$  fortsetzen können. Ohne die Allgemeinheit des Beweises einzuschränken, können wir annehmen, dass  $G_1'' \subset G_1'$  und  $G_2'' \subset G_2'$  gilt. Es ist nämlich immer möglich, den Vergleich mittels derjenigen einfach zusammenhängenden Komponenten von  $G_1' \cap G_1''$  und  $G_2' \cap G_2''$  auszuführen, an deren Begrenzung der Bogen  $C$  liegt.

Wir bilden die Gebiete  $G_1'$  und  $G_2'$  konform auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene mit den Abbildungsfunktionen  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$  ab. Diese Funktionen wählen wir so aus, dass der Bogen  $C$  auf die Strecke  $0 < u < 1$  der reellen Achse abgebildet wird. Die Gebiete  $G_1''$  und  $G_2''$  werden dabei auf die Teilgebiete  $H_1''$  und  $H_2''$  der Halbebenen abgebildet, die an ihrer Begrenzung die Strecke  $0 < u < 1$  haben (vgl. Abb. 2 und 3). Die Gebiete  $H_1''$  und  $H_2''$  bilden wir weiter konform auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene mit den Abbildungsfunktionen  $A_1(w)$  und  $A_2(w)$  so ab, dass die Strecke  $0 < u < 1$  auf sich selbst abgebildet wird. Die zusammengesetzten Abbildungen  $A_1S_1(z)$  und  $A_2S_2(z)$  geben uns dann die konformen Abbildungen von  $G_1''$  und  $G_2''$  auf die obere bzw. untere Halbebene.

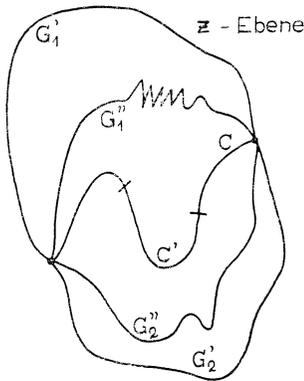


Abb. 2

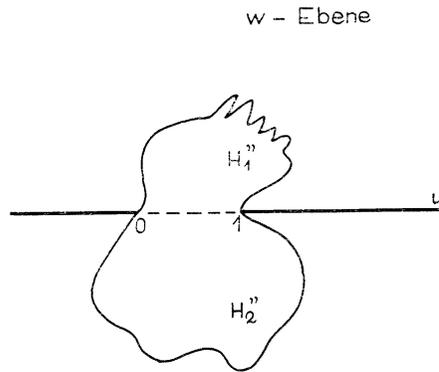


Abb. 3

Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip sind die Abbildungsfunktionen  $A_1(w)$  und  $A_2(w)$  auf der Strecke  $0 < u < 1$  reguläre analytische Funktionen und ihre Ableitungen sind dort von Null verschieden. Folglich erfüllen sie auf jedem abgeschlossenen Teil der Strecke  $0 < u < 1$  eine  $\varrho$ -Bedingung.

Angenommen die Abbildung  $W_1(z)$  lasse sich über die kompakten Teile des Randbogens  $C$  in das Gebiet  $G_2'$  fortsetzen. Dann erfüllt die Funktion  $S_1S_2^{-1}$  nach Satz 6 auf jedem abgeschlossenen Teil des Intervalls  $0 < u < 1$  eine  $\varrho$ -Bedingung. Die Funktion  $(A_1S_1)(A_2S_2)^{-1} = A_1(S_1S_2^{-1})A_2^{-1}$  erfüllt folglich auch eine  $\varrho$ -Bedingung auf jedem abge-

schlossenen Teil des Intervalls  $0 < u < 1$ , weil dieselbe eine zusammengesetzte Abbildung von drei, die  $\varrho$ -Bedingung erfüllenden Abbildungen ist. Aus Satz 6 sehen wir schliesslich, dass auch die Abbildung  $W_2(z)$  sich über die kompakten Teile des Randbogens  $C$  in das Gebiet  $G_2''$  fortsetzen lässt.

Nehmen wir umgekehrt an, dass die Fortsetzung für  $W_2(z)$  aus  $G_1''$  über die kompakten Teile von  $C$  in  $G_2''$  möglich ist, so können wir genau wie oben vorgehen und beweisen, dass man dann auch  $W_1(z)$  aus  $G_1'$  in  $G_2'$  fortsetzen kann. Dabei müssen wir nur  $S_1 S_2^{-1} = A_1^{-1}((A_1 S_1)(A_2 S_2)^{-1})A_2$  setzen. Die Behauptung ist somit bewiesen.

13. In der Theorie der konformen Abbildungen ist wohlbekannt, dass eine konforme Abbildung von einem Gebiet auf die Halbebene über einen Bogen des Randes genau dann fortgesetzt werden kann, wenn der betrachtete Randbogen analytisch ist. Nach Satz 8 sehen wir, dass es auch in Bezug auf die quasikonformen Abbildungen eine ähnliche Kurvenklasse gibt. Diese Kurvenbögen sind durch die Eigenschaft charakterisiert, dass sie jede beliebige quasikonforme Abbildung auf die Halbebene über die kompakten Teile des Bogens fortsetzen lassen. Wir bezeichnen diese weiterhin als *Bögen, die eine quasikonforme Fortsetzung gestatten*. Mit den Sätzen 6 bis 8 gelten auch die folgenden:

**Satz 9.** *Zwei punktfremde einfach zusammenhängende Gebiete haben an ihren Begrenzungen einen offenen freien Jordanbogen gemeinsam. Konforme Abbildungen der genannten Gebiete auf die obere bzw. untere  $w$ -Halbebene seien  $S_1$  bzw.  $S_2$ . Diese Abbildungen werden so gewählt, dass der Bogen  $C$  in  $S_1$  und in  $S_2$  auf Strecken  $a_1 < u < b_1$  bzw.  $a_2 < u < b_2$  der Re  $w$ -Achse abgebildet wird. Dann gestattet der Bogen  $C$  eine quasikonforme Fortsetzung genau dann, wenn die Funktion  $S_1 S_2^{-1}$  auf jedem abgeschlossenen Teil des Intervalls  $a_2 < u < b_2$  eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt.*

**Satz 10.** *Ein offener Jordanbogen  $C$  gestattet eine quasikonforme Fortsetzung dann und nur dann, wenn sich jeder abgeschlossene Teilbogen des Bogens  $C$  als Bild einer Strecke in einer quasikonformen Abbildung darstellen lässt.*

14. Die Eigenschaft eines Kurvenbogens  $C$ , eine quasikonforme Fortsetzung zu gestatten, kann auch lokal ausgesprochen werden. Wir sagen, dass der Jordanbogen  $C$  *eine quasikonforme Fortsetzung im Punkte  $z$  gestattet*, wenn es einen solchen Teilbogen von  $C$  gibt, der eine quasikonforme Fortsetzung gestattet und der  $z$  als inneren Punkt enthält. Dieser Begriff hat Bedeutung auf Grund des folgenden Satzes.

**Satz 11.** *Ein offener Jordanbogen, der eine quasikonforme Fortsetzung in*

jedem seiner Punkte gestattet, gestattet auch eine quasikonforme Fortsetzung im Grossen.

*Beweis:* Weil der zu betrachtende Bogen  $C$  eine quasikonforme Fortsetzung in jedem seiner Punkte gestattet, können wir nach Satz 9, dessen Bezeichnungen hier benutzt werden, jedem Punkt  $u$  des Intervalls  $I$ ,  $a < u < b$ , ein offenes Intervall  $I_u$  zuordnen mit der Eigenschaft, dass die Funktion  $S_1 S_2^{-1}$  auf dem Intervall  $I_u$  eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt. Betrachten wir nun ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall  $I_0 \subset I$ ,  $a_0 \leq u \leq b_0$ , so können wir nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz das Intervall  $I_0$  mit endlich vielen Intervallen  $I_u: I_{u_1}, I_{u_2}, \dots, I_{u_n}$  überdecken, auf denen je eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt ist. Die Endpunkte von  $I_0, I_{u_1}, \dots, I_{u_n}$  bilden eine endliche Anzahl von verschiedenen Punkten. Das Intervall  $I_0$  bleibt zwischen den äussersten dieser Punkten. Wir bezeichnen mit  $2d$  die kürzeste Entfernung zwischen zwei sukzessiven Punkten. Dann gibt es eine positive Zahl  $r$  mit der Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$q(u, t) = \frac{S_1 S_2^{-1}(u + t) - S_1 S_2^{-1}(u)}{S_1 S_2^{-1}(u) - S_1 S_2^{-1}(u - t)}$$

zwischen den Grenzen  $r$  und  $1/r$  liegt, wenn nur  $a_0 \leq u \leq b_0$  und  $0 < t < d$  gelten.

Die Wertepaare  $(u, t)$  für welche  $a_0 \leq u \pm t \leq b_0$  und  $t \geq d$  gelten, bilden eine kompakte Menge in der  $(u, t)$ -Ebene (vgl. Abb. 4), wo  $q(u, t)$

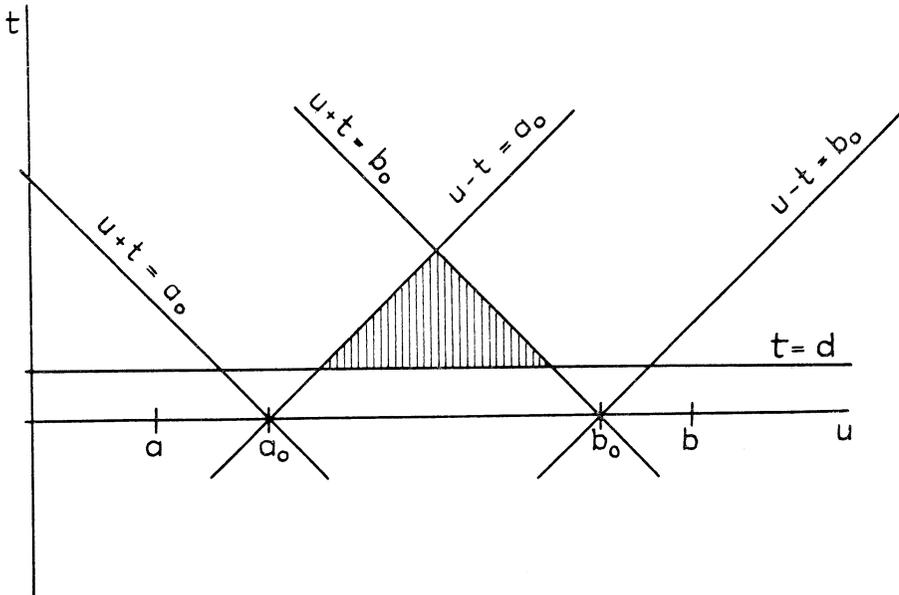


Abb. 4

stetig und von Null verschieden ist. Die Funktion  $q(u, t)$  hat folglich in der genannten Menge je ein positives und endliches Maximum und Minimum.

Wir schliessen also, dass die Funktion  $S_1 S_2^{-1}$  eine  $\varrho$ -Bedingung auf dem Intervall  $I_0$  erfüllt. Weil  $I_0$  beliebig aus dem Intervall  $a < u < b$  ausgewählt worden war, gestattet  $C$  somit nach Satz 9 eine quasikonforme Fortsetzung, und Satz 11 ist bewiesen.

Das soeben bewiesene Resultat wirft die Frage auf, ob eine geschlossene Jordankurve, die in jedem Punkte eine quasikonforme Fortsetzung gestattet, auch eine quasikonforme Fortsetzung im Grossen im Sinne der Betrachtungen von § 3 gestattet. Unter den konformen Abbildungen gilt ein analoges Resultat nicht: Es gibt selbstverständlich auch andere geschlossene analytische Kurven als den Kreis. Unter den quasikonformen Abbildungen ist die Antwort auf die Frage aber positiv, was für spätere Anwendungen in § 5 wichtig sein wird.

**Satz 12.** *Eine geschlossene Jordankurve, die in jedem Punkte eine quasikonforme Fortsetzung gestattet, gestattet auch eine quasikonforme Fortsetzung im Grossen.*

*Beweis:* Die betrachtete Jordankurve  $C$  zerlege die Ebene in Gebiete  $G_1$  und  $G_2$ . Wir bilden diese Gebiete konform auf die obere und untere  $w$ -Halbebene mit Abbildungsfunktionen  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$  so ab, dass  $S_1^{-1}(\infty) = S_2^{-1}(\infty) = z_0$ .

Zum Beweis wird Satz 3 aus § 3 benutzt. Wir werden zeigen, dass  $p(u) = S_1 S_2^{-1}(u)$  eine  $\varrho$ -Bedingung auf der ganzen reellen Achse erfüllt. Für jedes endliche Intervall ist dies nach Satz 11 offensichtlich. Es wird auch ein Intervall gefunden derart, dass  $p(u)$  ausserhalb dieses Intervalls, d.h. für Werte  $|u| \geq M$ ,  $|u \pm t| \geq M$ , eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt. Unter Benutzung dieser zwei Teilresultate können dann Abschätzungen aufgestellt werden, welche beweisen, dass  $p(u)$  eine  $\varrho$ -Bedingung auf der ganzen reellen Achse erfüllt.

Wir transformieren die  $w$ -Ebene mit der linearen Transformation  $L(w) = -1/w$ , die eine Selbstabbildung der beiden Halbebenen ist und den Punkt  $w = \infty$  in  $w = 0$  abbildet. Die konformen Abbildungen  $LS_1(z)$  und  $LS_2(z)$  bilden  $z_0$  in  $w = 0$  ab. Da die Kurve  $C$  in einer Umgebung des Punktes  $z_0$  eine quasikonforme Fortsetzung gestattet, erfüllt die Funktion  $(LS_1)(LS_2)^{-1}$  eine  $\varrho$ -Bedingung auf einem Intervall  $|u| \leq 1/M$ . Satz 2 gemäss kann man eine quasikonforme Selbstabbildung  $T(w)$  der oberen Halbebene finden, deren Randabbildung auf dem Intervall  $|u| \leq 1/M$  mit  $(LS_1)(LS_2)^{-1}$  zusammenfällt. Die Abbildung  $L^{-1}TL(w)$  ist auch eine quasikonforme Selbstabbildung der oberen Halbebene, die den Punkt  $w = \infty$  festhält und deren Randabbildung für  $|u| \geq M$  mit  $S_1 S_2^{-1} = L^{-1}((LS_1)(LS_2)^{-1})L$  zusammenfällt. Nach Satz 1 erfüllt die Randabbildung von  $L^{-1}TL$  eine  $\varrho$ -Bedingung. Somit erkennen wir

die Existenz einer positiven Zahl  $r_1$  derart, dass der Ausdruck

$$q(u, t) = \frac{p(u+t) - p(u)}{p(u) - p(u-t)}, \text{ wo } p(u) = S_1 S_2^{-1}(u),$$

zwischen den Grenzen  $r_1$  und  $1/r_1$  liegt, sobald  $|u| \geq M$  und  $|u \pm t| \geq M$  gelten.

Wegen der Sätze 11 und 9 sehen wir weiter, dass  $p(u) = S_1 S_2^{-1}(u)$  auf jedem endlichen Intervall eine  $\varrho$ -Bedingung erfüllt. Wir können also eine positive Zahl  $r_2$  derart finden, dass  $q(u, t)$  zwischen den Schranken  $r_2$  und  $1/r_2$  liegt, wenn nur  $|u+t| \leq 7M$  gilt.

Wir haben bis jetzt gleichmässige positive obere und untere Schranken für  $q(u, t)$  in den Gebieten

$$A = \{ (u, t) : |u| \geq M, |u \pm t| \geq M \}$$

$$B = \{ (u, t) : |u \pm t| \leq 7M \}$$

der  $(u, t)$ -Ebene gefunden. Um zu beweisen, dass  $p(u)$  eine  $\varrho$ -Bedingung auf der ganzen reellen Achse erfüllt, schätzen wir noch den Ausdruck  $q(u, t)$  in den Gebieten

$$C = \{ (u, t) : |u| \leq M, t \geq 3M \}$$

$$D = \{ (u, t) : |u-t| \leq M, t \geq 3M \}$$

$$E = \{ (u, t) : |u+t| \leq M, t \geq 3M \}$$

ab. Im Gebiet  $C$  ist

$$\begin{aligned} q(u, t) &\leq \frac{p(M+t) - p(-M)}{p(-M) - p(M-t)} \\ &= \left[ \frac{p(M+t) - p(M)}{p(M) - p(M-t)} \right] \left[ \frac{p(M+t) - p(-M)}{p(M+t) - p(M)} \right] \left[ \frac{p(M) - p(M-t)}{p(-M) - p(M-t)} \right] \\ &\leq r_1 \left[ \frac{p(4M) - p(-M)}{p(4M) - p(M)} \right] \left[ \frac{p(M) - p(-2M)}{p(-M) - p(-2M)} \right], \end{aligned}$$

und andererseits erhält man mit analogen Abschätzungen in  $C$

$$q(u, t) \geq \frac{1}{r_1} \left[ \frac{p(2M) - p(M)}{p(2M) - p(-M)} \right] \left[ \frac{p(-M) - p(-4M)}{p(M) - p(-4M)} \right].$$

In  $D$  gestalten sich die Abschätzungen wie folgt. Man bemerkt, dass  $M \leq t/3$ ,  $2t/3 \leq u \leq 4t/3$ , und deshalb

$$q(u, t) \leq \frac{p(7t/3) - p(2t/3)}{p(2t/3) - p(t/3)} \leq \frac{p(9t/3) - p(t/3)}{p(2t/3) - p(t/3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{p(9t/3) - p(5t/3)}{p(5t/3) - p(t/3)} + 1 \right] \left[ \frac{p(5t/3) - p(t)}{p(t) - p(t/3)} + 1 \right] \left[ \frac{p(t) - p(2t/3)}{p(2t/3) - p(t/3)} + 1 \right] \\
&\cong (r_1 + 1)^3.
\end{aligned}$$

Auf eine ähnliche Weise folgert man, dass in  $D$

$$q(u, t) \cong \frac{1}{(r_1 + 1)^3}.$$

Im Gebiete  $E$  findet man mit demselben Verfahren wie in  $D$  die oberen und unteren Schranken  $(r_1 + 1)^3$  und  $1/(r_1 + 1)^3$  für  $q(u, t)$ .

Die Gebiete  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $E$  überdecken die gesamte Halbebene  $\{(u, t) : t > 0\}$ . Der Ausdruck  $q(u, t)$  liegt somit in dieser Halbebene zwischen zwei positiven Schranken, und die Funktion  $p(u) = S_1 S_2^{-1}(u)$  erfüllt also die  $\varrho$ -Bedingung auf der ganzen reellen Achse. Nach Satz 3 gestattet die geschlossene Jordankurve  $C$  somit eine quasikonforme Fortsetzung, was zu beweisen war.

Satz 12 erlaubt uns den Satz 4 in § 3 zu verschärfen, der besagt, dass eine Jordankurve, die eine quasikonforme Fortsetzung gestattet, ein Bild des Kreises in einer quasikonformen Abbildung der *ganzen* Ebene ist. Diese Bedingung ist nach den Sätzen 10 und 12 unnötig streng; wir können im Satze 4 auch eine quasikonforme Abbildung eines beliebigen die Kurve enthaltenden Gebietes zulassen. Doch ist zu bemerken, dass der quantitative Teil des Satzes 4 nach dieser Verschärfung nicht mehr gilt.

Wir fassen noch die letzterwähnten Beobachtungen als ein Korollar zusammen:

**Korollar.** *Eine geschlossene Jordankurve gestattet eine quasikonforme Fortsetzung dann und nur dann, wenn sie als Bild des Kreises in einer quasikonformen Abbildung dargestellt werden kann.*

## § 5. Spezielle Bogenklassen, bei welchen die Fortsetzung der Abbildung möglich ist

15. Im vorliegenden Paragraph haben wir die Absicht einige Bedingungen abzuleiten, unter denen es sich entscheiden lässt, ob eine spezielle Kurve eine quasikonforme Fortsetzung gestattet. Diese Aufgabe wird durch die Sätze 11 und 12 sehr erleichtert, da wir uns hier auf lokale Betrachtungen beschränken können. Zuerst beweisen wir:

**Satz 13.** *Ein Jordanbogen  $C$  gestattet eine quasikonforme Fortsetzung im Punkte  $z_0$ , wenn die konformen Abbildungen zweier punktfremden, am Bogen  $C$  aneinandergrenzenden, Gebiete auf die Halbebene in einer Umgebung von*

$z_0$  auf dem Bogen<sup>1)</sup>  $C$  je eine Ableitung besitzen, deren Absolutbetrag auf dem Bogen  $C$  zwischen zwei festen positiven Schranken liegt.

*Beweis:* Es seien  $G_1$  und  $G_2$  punktfremde einfach zusammenhängende Gebiete, die an  $C$  grenzen. Die konformen Abbildungsfunktionen von  $G_1$  und  $G_2$  auf die obere bzw. untere Halbebene seien  $S_1(z)$  und  $S_2(z)$ . Dann hat die Funktion  $p(u) = S_1 S_2^{-1}(u)$  auf einem den Punkt  $u_0 = S_2(z_0)$  enthaltenden Intervall  $I$  eine Ableitung, die auf  $I$  gleichmässig zwischen positiven Schranken  $m$  und  $M$  liegt. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erfüllt  $p(u)$  die  $\rho$ -Bedingung auf  $I$  mit  $\rho = M/m$ . Gemäss Satz 9 gestattet also der Teilbogen  $S_2^{-1}(I)$  von  $C$  eine quasikonforme Fortsetzung. Dieser Bogen enthält  $z_0$  als inneren Punkt; somit gestattet der Bogen  $C$  im Punkte  $z_0$  wie behauptet eine quasikonforme Fortsetzung.

Wir betrachten jetzt, in welchen Kurvenklassen die Bedingungen des Satzes 13 erfüllt sind. Falls der Bogen  $C$  ein analytischer Kurvenbogen ist, sind die Bedingungen des Satzes ohne weiteres erfüllt. Wenn der Bogen allgemeiner eine *stetige Krümmung* besitzt, kann man beweisen, dass die konforme Abbildungsfunktion eines durch  $C$  berandeten Gebietes auf die Halbebene, auf dem Bogen  $C$  eine stetige und von Null verschiedene Ableitung hat (vgl. Lichtenstein [9]).

Es ist zu beachten, dass die blosse Stetigkeit der Tangente noch nicht garantiert, dass die im Satz 13 eingeführten konformen Abbildungsfunktionen je eine beschränkte Ableitung auf  $C$  besitzen. Das kann man mit Hilfe eines von O. D. Kellogg herrührenden Gegenbeispiels sehen: Man betrachte die durch  $w = z \log z$  vermittelte Abbildung des Halbkreises  $\{z: |z| < r, 0 < \arg z < \pi\}$  im Randpunkte  $z = 0$ . Zugleich sei jedoch darauf hingewiesen, dass dies noch nicht die Möglichkeit einer quasikonformen Fortsetzung ausschliesst.

In der Literatur (vgl. Kellogg [6], Warschawski [11]) existieren mehrere Resultate, gemäss denen die Voraussetzungen des Satzes 13 erfüllt sind, wenn die Stetigkeitseigenschaften der Tangente mit gewissen Lipschitz- oder Hölderbedingungen verschärft worden sind. Eine zusammenfassende Darstellung über diese verschiedenen Resultate findet man in dem Referat [4] (110, SS 32–35).

16. Die Anwendung des oben bewiesenen Satzes beschränkt sich auf den Fall, in dem der Bogen  $C$  im betrachteten Punkte  $z_0$  und in einer Umgebung desselben eine Tangente besitzt. Wir wollen nun untersuchen, ob auch die Existenz von Eckpunkten auf dem Bogen gestattet werden kann. Dafür beweisen wir erstens

<sup>1)</sup> Die Ableitung  $w'(z_1)$  auf dem Bogen  $C$  ist als Grenzwert des Verhältnisses  $\Delta w/\Delta z$  zu verstehen, wenn  $z$  sich der Kurve  $C$  entlang dem Punkt  $z_1$  nähert.

**Satz 14.** *Der Jordanbogen  $C$  habe im Punkte  $z_0$  zwei Halbtangenten. Wenn der Winkel zwischen den Halbtangenten ein Nullwinkel ist, so gestattet der Bogen  $C$  im Punkte  $z_0$  keine quasikonforme Fortsetzung.*

*Beweis:* Angenommen die Antithese der Bogen  $C$  gestatte im Punkte  $z_0$ , in dem der Winkel zwischen den Halbtangenten gleich Null ist, eine quasikonforme Fortsetzung. Dann existiert nach Satz 10 in einer Umgebung von  $z_0$  eine  $K$ -quasikonforme Abbildung  $w = W(z)$  derart, dass ein Teilbogen von  $C$  auf einer Strecke  $I$  abgebildet wird. Der Punkt  $z_0$  werde dabei in den Punkt  $w_0$  abgebildet. Wir können einen Kreis  $K_w$  mit dem Mittelpunkt  $w_0$  so finden, dass die inverse Abbildung  $W^{-1}$  in dem ganzen Kreis  $K_w$  definiert ist. In der Abbildung  $W^{-1}$  werde  $K_w$  auf die Jordankurve  $K_z$  abgebildet. Die Schnittpunkte von  $K_w$  und  $I$  seien  $w_1 = W(z_1)$  und  $w_2 = W(z_2)$ . Die Bezeichnungen seien so gewählt, dass der Teilbogen  $z_0z_1$  auf  $C$  den rechten Schenkel des Nullwinkels bildet (vgl. Abb. 5 und 6).

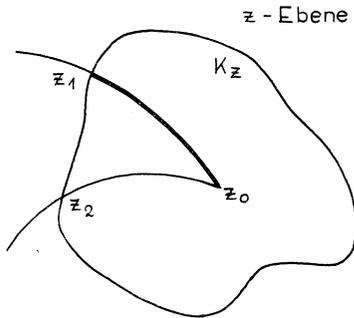


Abb. 5

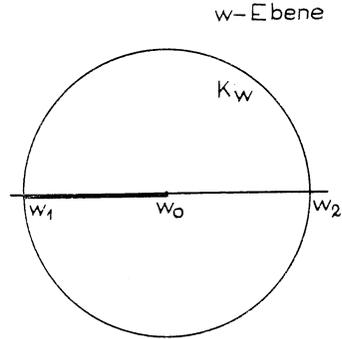


Abb. 6

Die Gebiete, die aus dem Inneren von  $K_z$  und  $K_w$  durch Einschnitt längs des Bogens  $z_1z_0$  und der Strecke  $w_1w_0$  entstehen, bilden wir auf die obere  $\zeta$ - bzw.  $\omega$ -Halbebenen mit den konformen Abbildungsfunktionen  $A(z)$  und  $B(w)$  so ab, dass  $A(z_0) = B(w_0) = 0$  und  $A(z_1) = B(w_1) = \infty$ , wo der Randpunkt  $z_1$  auf dem zum Nullwinkel hin gelegenen Rande des Einschnittes liegt. Nach einem wohlbekannten Resultat der Theorie der Ränderzuordnung in der konformen Abbildung (vgl. Carathéodory [3] SS 95—98) ist der Winkel zwischen der  $Re \zeta$ -Achse und dem Bildbogen  $C_\zeta$  des Bogens  $z_0z_2$  ein Nullwinkel, während der Bildbogen  $I_\omega$  der Strecke  $w_0w_2$  zur  $Re \omega$ -Achse rechtwinklig liegt. Die Abbildung  $\omega = BWA^{-1}(\zeta)$  der  $\zeta$ -Ebene auf die  $\omega$ -Ebene ist  $K$ -quasikonform. Dann gilt eine Ungleichung (vgl. Hersch-Pfluger [5])

$$(10) \quad \sin\left(\frac{1}{2} \arg \omega\right) \leq \varphi_K\left(\sin\left(\frac{1}{2} \arg \zeta\right)\right),$$

wo  $\varphi_K(t)$  eine Verzerrungsfunktion ist, die mit  $t$  monoton gegen Null abnimmt. Wir lassen nun  $\zeta$  längs  $C_\zeta$  gegen Null konvergieren. Dabei konvergiert auch der Bildpunkt  $\omega$  auf  $I_\omega$  gegen den Nullpunkt. Dann strebt die rechte Seite der Ungleichung (10) nach Null, während der Grenzwert der linken Seite gleich  $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  ist. Die Antithese hat somit zum Widerspruch geführt, und Satz 14 ist bewiesen.

Zur Untersuchung des Einflusses der Eckpunkte benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

**Lemma.** *Wenn der Innenwinkel  $\alpha\pi$  eines Kreisbogenzweiecks die Bedingung  $0 < \alpha\pi < 2\pi$  erfüllt, so gestattet der Rand des Zweiecks eine quasikonforme Fortsetzung. Dann kann der Rand als Bild einer Geraden in einer quasikonformen Abbildung der ganzen Ebene dargestellt werden, deren maximale Dilatation gleich der grösseren der Zahlen  $1/\alpha$  und  $1/(2-\alpha)$  ist.*

*Beweis:* Die Ecken des Zweiecks seien durch eine lineare Transformation in den Nullpunkt und in den unendlich fernen Punkt so abgebildet, dass das Innere des Zweiecks dabei auf das Gebiet  $G_1 = \{z : 0 < \arg z < \alpha\pi\}$  und das Äussere auf das Gebiet  $G_2 = \{z : 0 < \arg z < -(2-\alpha)\pi\}$  bezogen wird. Die Konstruktion der im Lemma angeführten Abbildung ist folgende: Zu Beginn bilden wir mit der Funktion  $w = \log z$  die Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  auf den Parallelstreifen  $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < \alpha\pi\}$  und  $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < -(2-\alpha)\pi\}$  ab. In der oberen  $w$ -Ebene führen wir weiter die affine Transformation  $u_1 = u$ ,  $v_1 = v/\alpha$ , und in der unteren Halbebene die Transformation  $u_1 = u$ ,  $v_1 = v/(2-\alpha)$  aus. Durch Zusammensetzung erhält man eine quasikonforme Abbildung von der längs der Halbgeraden  $\arg z = \alpha\pi$  aufgeschnittenen Ebene auf den Parallelstreifen  $\{w : -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$ , deren maximale Dilatation gleich der grösseren der Zahlen  $1/\alpha$  und  $1/(2-\alpha)$  ist. Diesen Parallelstreifen bilden wir weiter mit der Funktion  $e^w$  auf die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Ebene ab. Dabei entsprechen die gegeneinanderliegenden Punkte am Aufschnitt der  $z$ -Ebene wieder den gegeneinanderliegenden Punkten. Die Schnitte sind somit hebbbar und wir haben eine quasikonforme Abbildung der ganzen Ebene erhalten, in welcher der Rand unseres Zweiecks das Bild einer Geraden ist.

Mit Hilfe des vorigen Lemmas werden wir zeigen, dass nicht die Existenz einer Ecke auf dem Bogen, sondern das Verhalten des Bogens in einer Umgebung der Ecke massgebend dafür ist, ob der Bogen im Eckpunkte eine quasikonforme Fortsetzung gestattet oder nicht. Dies geht aus den folgenden zwei Sätzen 15 und 16 hervor. Mit Hilfe derselben kann die Frage, ob der Bogen in einem Eckpunkt eine quasikonforme Fortsetzung gestatte, in vielen Fällen gelöst werden.

**Satz 15.** *Der Jordansche Kurvenbogen  $C$  habe im Punkte  $z_0$  eine Tangente. Der Bildbogen von  $C$  in der konformen Abbildung mittels eines ein-*

deutigen Zweiges der Funktion  $w-w_0=(z-z_0)^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ , sei  $C'$ . Dann gestattet der Bogen  $C'$  im Punkte  $w_0$  genau dann eine quasikonforme Fortsetzung, wenn  $C$  in  $z_0$  eine quasikonforme Fortsetzung gestattet.

*Beweis:* Wir zeichnen einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $z_0$ . Wir bezeichnen mit  $C_z$  den zusammenhängenden Teil des Bogens  $C$ , der den Punkt  $z_0$  enthält und innerhalb des Kreises liegt. Der Kreis soll klein genug gezeichnet werden, so dass auf  $C_z$  die Differenz zwischen der Tangentenrichtung am  $z_0$  und der  $\arg(z-z_0)$  kleiner als  $\frac{1}{2}\pi(2-\alpha)$  ist. Der Teilbogen  $C_z$  zerlegt den Kreis in zwei Teilgebiete,  $G_z$  sei eines dieser Gebiete. Das Gebiet  $G_z$  ist gänzlich in einem Winkelgebiet  $S_z$  enthalten, dessen Eckpunkt mit dem Eckwinkel  $=\pi + \frac{1}{2}\pi(2-\alpha)$  in  $z_0$  liegt. Bei der Abbildung  $w-w_0=(z-z_0)^\alpha$  seien die Bildgebiete von  $G_z$  und  $S_z$  die Gebiete  $G_w$  und  $S_w$ . Das Gebiet  $G_w$  begrenzt sich am Bogen  $C_w$ , dem Bildbogen von  $C_z$ . Der Eckwinkel des Winkelgebietes  $S_w$  liegt der Größe nach zwischen 0 und  $2\pi$  (vgl. Abb. 7 und 8).

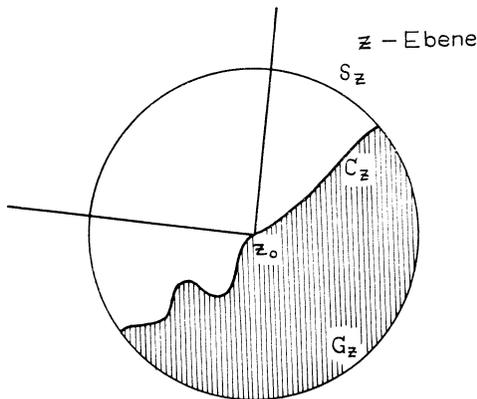


Abb. 7

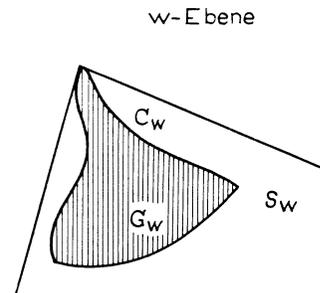


Abb. 8

Nach dem obigen Lemma und Satz 5 erkennt man, dass die gewonnene konforme Abbildung des Winkelgebietes  $S_z$  auf  $S_w$  zu einer quasikonformen Abbildung der ganzen  $z$ -Ebene fortgesetzt werden kann. In dieser Abbildung sind die Bögen  $C_z$  und  $C_w$  Bilder von einander, und somit gestattet  $C_z$  nach Satz 10 im Punkte  $z_0$  genau dann eine quasikonforme Fortsetzung, wenn der Bogen  $C_w$  im Punkte  $w_0$  eine quasikonforme Fortsetzung gestattet.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen, wie im Beweis des Satzes 15, beweist man

**Satz 16.** *Der Jordansche Kurvenbogen  $C$  habe im Punkte  $z_0$  eine Tangente. Dieser Bogen werde durch einen eindeutigen Zweig der quasikonformen Abbildung:*

$$|w - w_0| = |z - z_0|, \quad \arg(w - w_0) = \alpha \arg(z - z_0) + \beta,$$

$0 < \alpha < 2$ , auf die  $w$ -Ebene abgebildet. Der Bildbogen von  $C$  sei dabei  $C'$ . Dann gestattet  $C$  in  $z_0$  genau dann eine quasikonforme Fortsetzung, wenn der Bogen  $C'$  in  $w_0$  eine quasikonforme Fortsetzung gestattet.

Als eine Anwendung der obigen Sätze 15 und 16 beweisen wir das folgende, sich auf eine spezielle Bogenklasse beziehende Resultat.

**Satz 17.** *Ein Jordanbogen  $C$ , der beim Zusammenfügen zweier, bis zum Endpunkt eine stetige und beschränkte Krümmung besitzenden, Bögen in einem von Null verschiedenen Winkel entsteht, gestattet eine quasikonforme Fortsetzung.*

*Beweis:* Nach Satz 13 muss der Sachverhalt nur im Fügungspunkt  $z_0$  untersucht werden. Bilden wir  $C$  mit einem eindeutigen Zweig der Funktion  $w = (z - z_0)^{1/2}$  auf die  $w$ -Ebene ab, so erhalten wir eine Bildkurve  $C_w$ , welche die Eigenschaft besitzt, dass die Krümmung der beiden Kurvenäste gegen Null konvergiert, wenn man sich dem Fügungspunkt nähert. Diese Kurvenäste bilden wir weiter mit einer im Satz 16 eingeführten quasikonformen Abbildung so ab, dass der erzeugte neue Bogen  $C'_w$  im Fügungspunkt der Bilder  $w_0$  eine Tangente besitzt. Dann ist  $C'_w$  ein Kurvenbogen, der in einer Umgebung von  $w_0$  eine stetige Krümmung besitzt, und gestattet somit nach Satz 13 dort eine quasikonforme Fortsetzung. Nach den Sätzen 15 und 16 gilt dasselbe auch für den Bogen  $C$  im Punkte  $z_0$ .

## Literatur

- [1] AHLFORS, L. V.: On quasiconformal mappings. - *J. Analyse Math.* **3**, 1954, 1—54.
- [2] BEURLING, A. - AHLFORS, L.: The boundary correspondence under quasiconformal mappings. - *Acta Math.* **96**, 1956, 125—142.
- [3] CARATHÉODORY, C.: *Funktionentheorie II*. - Basel 1950.
- [4] GATTEGNO, C. - OSTROWSKI, A.: Représentation conforme à la frontière. - *Mém. Sc. Math.* **109—110**, Paris 1949.
- [5] HERSCH, J. - PFLUGER, A.: Généralisation du lemme de Schwarz et de la mesure harmonique pour les fonctions pseudoanalytiques. - *C. R. Acad. Sci. Paris* **234**, 1952, 43—45.
- [6] KELLOGG, O. D.: Harmonic functions and Green's integral. - *Trans. Amer. Math. Soc.* **13**, 1912, 109—132.
- [7] KÜNZI, H. P.: *Quasikonforme Abbildungen*. - Springer 1960.
- [8] LEHTO, O. - VIRTANEN, K. I.: On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilatation. - *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I.* **274**, 1960.
- [9] LICHTENSTEIN, L.: Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus. - *Math. Ann.* **67**, 1909, 559—575.
- [10] PFLUGER, A.: Ueber die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung. - *J. Indian Math. Soc.* **XXIV**, Nos. 3 & 4, 1960, 401—412.
- [11] WARSCHAWSKI, S.: Ueber das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. - *Math. Z.* **35**, 1932, 321—456.