ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

543

BEMERKUNG ÜBER DIE SINGULARITÄT VON LÖSUNGEN DER ERSTEN RANDWERTAUFGABE HYPERBOLISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

BY

JOACHIM JAENICKE

HELSINKI 1973
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1973.543

ISBN 951-41-0111-1

Vorgelegt am 12. Februar 1973

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1973

Bemerkung über die Singularität von Lösungen der ersten Randwertaufgabe hyperbolischer Differentialgleichungen

Für die erste Randwertaufgabe der Gleichung $u_{xy} = 0$ über geeignete Zweieckgebiete gibt G. Fichera [1] Aussagen über das Verhalten einer Lösung in einer Ecke an. Hier wird gezeigt, wie diese Aussagen speziell auf die Funktionalgleichung der periodischen Funktionen und einer expliziten Darstellung des additiven singulären Anteils einer Lösung führen.

Sei G ein Gebiet der (x, y)-Ebene, das zwischen $x = 0$ und $x = b > 0$ liegt mit der x-Achse als untere Berandung und einer Kurve $y = h(x)$ als obere Berandung mit

$$h \in C^2[0, b], \quad |h'| < 1 \quad \text{in} \quad [0, b], \quad h > 0 \quad \text{in} \quad (0, b),$$
$$h(x) = \mu x \quad \text{in} \quad [0, a_0] \quad \text{für ein} \quad a_0 \quad \text{mit} \quad 0 < a_0 < b,$$
$$h(b) = 0, \quad h'(b) \neq 0.$$

Die auf $\dot{G}$ vorgegebenen Randwerte seien

(1) $$u(x, 0) = g_1(x) \quad \text{und} \quad u(x, h(x)) = g_2(x) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq b,$$

mit

$$g_1, g_2 \in C^2[0, b], \quad g_1(0) = g_2(0), \quad g_1(b) = g_2(b).$$

Die Differentialgleichung sei

(2) $$u_{xx} - u_{yy} = g$$

mit $g \in C^0(\bar{G})$ und g_x existiere mit $g_x \in C^0(\bar{G})$.

Die erste Randwertaufgabe (1), (2) über G [2] führt auf die Integralgleichung

(3) $$\int_{x-h(x)}^{x+h(x)} v(\xi)\, d\xi = f(x) \quad \text{für} \quad 0 < x < b,$$

mit

$$v(x) := u_y(x, 0),$$
$$f(x) := 2 g_2(x) - e(x, h(x))$$

und

$$e(x\,,y) := g_1(x+y) + g_1(x-y) - \int\limits_0^y \int\limits_{\eta+x-y}^{-\eta+x+y} g(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta \quad \text{für} \quad (x\,,y) \in \bar{G}\,.$$

Die Integralgleichung (3) hat nach [2] zum Beispiel eine Lösung

$$v \in C^1(0\,,b]\,. \tag{4}$$

In entsprechender Weise hat (3) eine Lösung

$$v_1 \in C^1[0\,,b)\,. \tag{5}$$

Aus v folgt [2]

$$u(x\,,y) = \frac{1}{2}\,e(x\,,y) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} v(\xi)\,d\xi \tag{6}$$

als Lösung $u \in C^2(\bar{G} - (0\,,0))$ der ersten Randwertaufgabe und entsprechend $u_1 \in C^2(\bar{G} - (b\,,0))$.

Satz. *Mit*

$$q := \frac{1+\mu}{1-\mu}\,, \qquad \lambda_k := \frac{2\,\pi\,k}{\log q}\,,$$

$$\alpha_k := \frac{2}{\log q}\int\limits_{(1-\mu)\,a_0}^{(1+\mu)\,a_0} (v(\xi) - v_1(\xi))\cos\,(\lambda_k \log \xi)\,d\xi$$

und entsprechender sin-*Formel für* β_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *und*

$$G_0 := \{\,(x,y) \in G \mid x+y < (1+\mu)\,a_0\,\}$$

ist

$$u = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\cos\left(\frac{\lambda_k}{2}\log\,(x^2-y^2)\right)\sin\left(\frac{\lambda_k}{2}\log\frac{x+y}{x-y}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\beta_k}{\lambda_k}\sin\left(\frac{\lambda_k}{2}\log\,(x^2-y^2)\right)\sin\left(\frac{\lambda_k}{2}\log\frac{x+y}{x-y}\right)\right\}$$

für $(x\,,y) \in G_0$ *eine explizite Darstellung des additiven singulären Anteils von* u *in* $(0\,,0)$.

Beweis. Nach den Eigenschaften von v und v_1 ist

$$\int\limits_{x-h(x)}^{x+h(x)} (v(\xi) - v_1(\xi))\,d\xi = 0 \qquad \text{für} \quad 0 < x < b\,. \tag{7}$$

Für $0 < x \leqq a_0$ und mit

$$\tau := \frac{2\pi \log \xi}{\log q}, \qquad W(\tau) := q^{\tau/(2\pi)}\,(v(q^{\tau/(2\pi)}) - v_1(q^{\tau/(2\pi)}))\,,$$

$$t := \frac{2\pi \log(1+\mu)\,x}{\log q}$$

folgt

$$\int_{t-2\pi}^{t} W(\tau)\,d\tau = 0 \qquad \text{für} \quad t \leqq t_0 := \frac{2\pi \log(1+\mu)\,a_0}{\log q}\,. \tag{8}$$

Also gilt für W die Funktionalgleichung

$$W(\tau) = W(\tau - 2\pi)$$

der periodischen Funktionen für $\tau \leqq t_0$. Nach (4) und (5) ist auch

$$W \in C^1([t_0 - 2\pi\,, t_0])\,, \quad W(t_0 - 2\pi) = W(t_0)\,, \quad W'(t_0 - 2\pi) = W'(t_0)\,.$$

Daher folgt durch Fourierentwicklung und wegen (8), daß

$$v(\xi) - v_1(\xi) = \frac{1}{\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\{\alpha_k \cos(\lambda_k \log \xi) + \beta_k \sin(\lambda_k \log \xi)\}$$

$$\text{für} \quad 0 < \xi \leqq (1+\mu)\,a_0$$

gleichmäßig konvergiert. Nach der Bestimmung von u und u_1 gemäß (6) folgt die Behauptung durch Berechnung von

$$\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} (v(\xi) - v_1(\xi))\,d\xi \qquad \text{für} \quad (x\,, y) \in G_0$$

unter Beachtung von $u_1 \in C^1(\bar{G}_0)$.

Diese Arbeit sei Herrn Ilppo Simo Louhivaara aus Anlaß meiner Gastzeit in Jyväskylä in Danbarkeit gewidmet.

Technische Universität Braunschweig
Institut A für Mathematik
D-3300 Braunschweig
Deutschland

Literatur

[1] FICHERA, G.: Studio delle singolarità della soluzione di un problema di Dirichlet per l'equazione $u_{xy}= 0$. - Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 50, 1971, S. 6–17.

[2] JAENICKE, J.: Lösung der ersten Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus. - Math. Z. 105, 1968, S. 72–86.

Gedruckt Juni 1973