Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 1, 1975, 77—83

# EINE VERSCHÄRFUNG DES KOEBESCHEN VIERTELSATZES FÜR QUASIKONFORM FORTSETZBARE ABBILDUNGEN

REINER KÜHNAU

## 1. Einleitung und Resultate

Es sei $S(Q)$ die Klasse der in $z = 0$ durch $w(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ normierten schlichten konformen Abbildungen $w = w(z)$ von $|z| < 1$, die sich zu einer stetigen schlichten $Q$-quasikonformen Abbildung der Vollkugel mit $w(\infty) = \infty$ fortsetzen lassen. Entsprechend bestehe die Klasse $\Sigma(Q)$ aus allen in $z = \infty$ durch $w(z) = z + A_1 z^{-1} + \ldots$ hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen von $|z| > 1$, die sich zu einer stetigen schlichten $Q$-quasikonformen Abbildung der Vollebene fortsetzen lassen. Für diese Klassen wurden jüngst in [1], [3], [5—18] mit verschiedenen Methoden spezielle Extremalprobleme betrachtet.

In [15] wurde dabei eine allgemeine Strukturformel für die durch quadratische Differentiale charakterisierten Extremalfunktionen aufgestellt, die bei Extremalproblemen vom Grötzsch—Teichmüllerschen Typ in diesen Klassen auftreten. Die Trächtigkeit dieser Strukturformel soll jetzt hier an einem Beispiel erläutert werden. Unter Verwendung der gebräuchlichen Bezeichnungen $C$ für die Eulersche Konstante $(C = 0.577\ldots)$ und $\Gamma$ und $\psi$ für die Eulersche Gamma- bzw. Psifunktion $(\psi = \Gamma'/\Gamma)$ sowie der Abkürzung $q = (Q-1)/(Q+1)$ werden wir folgende Verschärfung des Koebeschen Viertelsatzes beweisen.

Satz 1. *Für jede Abbildung aus* $S(Q)$ *liegt das Bild von* $|z| = 1$ *in dem Kreisring*

$$m(Q) \leq |w| \leq M(Q)\,, \tag{1}$$

*wo*

$$m(Q) = \exp\{-2\,C - 6\log 2 - 2\,\psi\,(2^{-1} - (2\pi)^{-1}\arccos q) - \pi\,Q^{-\frac{1}{2}}\}\,, \tag{2}$$

$$M(Q) = \exp\{-2\,C - 6\log 2 - 2\,\psi\,((2\pi)^{-1}\arccos q) - \pi\,Q^{\frac{1}{2}}\}\,. \tag{3}$$

*Ungleichung* (1) *ist scharf.*

doi:10.5186/aasfm.1975.0107

Extremalfunktionen nebst anderen Darstellungen für $m(Q)$ und $M(Q)$ werden sich aus dem Beweis ergeben.

Für kleine Werte von $q$ bestehen die asymptotischen Darstellungen

$$m(Q) = 1 - (8/\pi)\, G\, q + q^2\, \mathfrak{P}(q)\,, \tag{4}$$

$$M(Q) = 1 + (8/\pi)\, G\, q + q^2\, \mathfrak{P}(q)\,, \tag{5}$$

wo $G = 0.915\ldots$ die Catalansche Konstante ist und $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bezeichnet. Für kleine Werte von $1-q$ (d. h. große Werte von $Q$) gilt

$$m(Q) = \frac{1}{4}\,(1 + (1-q)\, \mathfrak{P}((1-q)^{\frac{1}{2}}))\,, \tag{6}$$

$$M(Q) = \exp\,\{\pi\, 2^{\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}} + \mathfrak{P}((1-q)^{\frac{1}{2}})\}\,. \tag{7}$$

Die Darstellungen (4) und (5) wurden schon von S. L. Kruškal' [5], [6] angegeben; vgl. auch die Verallgemeinerung von Lehto [18]. In (6) steckt für $Q \to \infty$ der klassische Koebesche Viertelsatz.

Mit Satz 1 hängt eng zusammen der folgende

Satz 2. *Für die Abbildungen* $w = w(z)$ *der Klasse* $\Sigma(Q)$ *gilt die scharfe Abschätzung*

$$2\, M(Q)^{-\frac{1}{2}} \leq |w(1) - w(-1)| \leq 2\, m(Q)^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{8}$$

Durch lineare Transformation fließt hieraus weiter der

Satz 3. *Für die schlichten konformen Abbildungen* $W = W(Z)$ *von* $\operatorname{Im} Z > 0$, *die sich zu einer stetigen schlichten* $Q$*-quasikonformen Abbildung der Vollebene* (*mit* $\infty \to \infty$) *fortsetzen lassen, gilt bei* $\operatorname{Im} Z > 0$ *die scharfe Abschätzung*

$$M(Q)^{-\frac{1}{2}} \leq \left|(\operatorname{Im} Z)\, \frac{W'(Z)}{W(Z) - W(\operatorname{Re} Z)}\right| \leq m(Q)^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{9}$$

## 2. Die Strukturformel

Der Beweis der genannten Sätze stützt sich wesentlich auf die folgende Strukturformel, die in [15] angegeben wurde. Sei dazu zunächst $w = w(z)$ allgemein eine stetige schlichte Abbildung der Vollkugel auf sich mit $w(\infty) = \infty$, die für $|z| > 1$ konform ist und die in $|z| < 1$ gelegenen infinitesimalen Kreise in infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses $Q > 1$ transformiert, wobei in Richtung der großen Achsen $\mathfrak{Q}(w)\, dw^2 \geq 0$ sei mit einer vorgegebenen rationalen Funktion $\mathfrak{Q}(w)$. Dann gilt

$$\int (\mathfrak{Q}(w))^{\frac{1}{2}}\,dw = \begin{cases} F(z) & \text{für } |z| \geq 1\,, \\ (1-q^2)^{-1}[\bar{G}(1/\bar{z}) + q\,G(1/\bar{z})] & \text{für } |z| \leq 1\,, \end{cases} \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned} F(z) &= -(1-q^2)^{-\frac{1}{2}} \int h^{\frac{1}{2}} \sin I\,dz\,, \\ G(z) &= \int h^{\frac{1}{2}} \cos I\,dz\,, \end{aligned} \tag{11}$$

und

$$I(z) = (1-q^2)^{\frac{1}{2}} \int^{z} (k/h)\,dz\,.$$

Hier sind $h$ und $k^2$ (in [15] näher charakterisierte) rationale Funktionen, für die $z^2h$ bzw. $z^3k$ auf $|z| = 1$ reell ist. Dazu soll noch eine ergänzende Relation angegeben werden, die sich aus der Übereinstimmung der beiden in (10) stehenden Ausdrücke für $|z| = 1$ ergibt. Zu diesem Zweck setzen wir $z = e^{it}$ und differenzieren die so entstehende Gleichung nach $t$, was zu

$$(1-q^2)^{\frac{1}{2}} \sin I = \pm\overline{\cos I} - q\cos I\,, \qquad |z| = 1\,,$$

führt. Hierbei steht das obere Zeichen bei $z^2h > 0$, das untere Zeichen bei $z^2h < 0$. Trennung dieser Gleichung in Real- und Imaginärteil führt (über die Anwendung von Additionstheoremen) auf

$$\begin{aligned} (1-q^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\operatorname{Re} I) &= \pm\cos(\operatorname{Re} I) - q\cos(\operatorname{Re} I)\,, \\ (1-q^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\operatorname{Re} I) &= \pm\sin(\operatorname{Re} I) + q\sin(\operatorname{Re} I)\,. \end{aligned}$$

Letztere beide Gleichungen sind ersichtlich äquivalent und liefern die gesuchte Gleichung

$$q = \pm\cos(2\operatorname{Re} I(z))\,, \qquad |z| = 1\,, \tag{12}$$

mit der genannten Vorzeichenregelung.

## 3. Beweise der Sätze 1—3

Satz 1 folgt in bekannter Weise nach Stürzung und einer Quadratwurzeloperation aus Satz 2. Satz 3 folgt aus Satz 2 durch lineare Transformation von $|z| > 1$ in die obere Halbebene, wobei $z = \infty$ in $Z$, $z = 1$ in $\infty$ und $z = -1$ in $\operatorname{Re} Z$ übergeht, und lineare Transformation der $w$-Ebene, wobei $w(1)$ in $\infty$ übergeht. Deshalb können wir uns im folgenden auf den Beweis von Satz 2 konzentrieren.

Betrachten wir dazu also in der Klasse $\Sigma(Q)$ die Extremalprobleme, das Minimum bzw. Maximum von $|w(1) - w(-1)|$ zu bestimmen. Nach den allgemeinen Bemerkungen am Anfange von [7] ist die Extremalfunktion hierzu jeweils eindeutig bestimmt und von der Art, wie oben am Anfange von § 2 beschrieben. Im hier vorliegenden Falle ist

$$(13)\qquad \mathfrak{Q}(w)\,dw^2 = \pm dw^2/(w^2-w_1^2)\,, \qquad w_1 = w(1) = -w(-1) > 0\,,$$

da sich dieses quadratische Differential nach H. Grötzsch (vgl. die Darstellung in [4, Chapter VI]) auch bei konformen Abbildungen einstellt. Hierbei steht — wie auch im folgenden stets — das obere Zeichen im Falle des Minimumproblems, das untere Zeichen im Falle des Maximumproblems. Wegen

$$(14)\qquad \int (w^2-w_1^2)^{-\frac{1}{2}}dw = \operatorname{ar\,cosh}(w/w_1) + \text{const} = \log w + \mathfrak{P}(1/w)$$

ergibt sich aus (10) und der Normierung unserer Abbildung in $z=\infty$ dort der Entwicklungstypus $F(z) = (\pm 1)^{\frac{1}{2}}\log z + \mathfrak{P}(1/z)$, $F'(z) = (\pm 1)^{\frac{1}{2}}/z + \ldots$, $F''(z) = -(\pm 1)^{\frac{1}{2}}/z^2 + \ldots$, $F'^2(z) = \pm 1/z^2 + \ldots$, $G(z) = \mathfrak{P}(1/z)$, $G'(z) = \mathfrak{P}(1/z)/z^2$, $G''(z) = \mathfrak{P}(1/z)/z^3$, also nach [15] (Formel (6))

$$(15)\qquad z^2h = \pm(1-q^2) + \ldots\,, \qquad z^6k^2 = \mathfrak{P}(1/z)/z^2 \quad \text{mit } \mathfrak{P}(0) \neq 0\,.$$

Nach Formel (12) in [15] folgt daraus die Darstellung

$$z^2h = i\,B_1(z+1)/(z-1) + i\,B_2(z-1)/(z+1) + D\,,$$

$B_1$, $B_2$, $D$ reelle Konstanten. Vergleich mit (15) zeigt, dass $\pm(1-q^2) = i(B_1+B_2) + D$ ist, also $B_1+B_2 = 0$, $D = \pm(1-q^2)$. Damit landen wir bei

$$z^2h = \pm(1-q^2) + i\,B_1\,4\,z/(z^2-1)\,,$$

was weiter $B_1 = 0$ nach sich zieht, da $h$ nach (6) in [15] gerade sein muß. Wir haben somit

$$(16)\qquad z^2h = \pm(1-q^2)\,.$$

Nach Formel (14) in [15] folgt nun weiter in Berücksichtigung der Entwicklung (15)

$$z^6k^2 = A\,z^4(z-1)^{-4}(z+1)^{-4}\prod_1^2 (z-k_\nu)\,(1-\bar{k}_\nu z)/z\,, \qquad A > 0\,, \qquad |k_\nu| \geq 1\,.$$

Hier müssen beide Stellen $k_\nu$ auf dem Einheitskreis liegen, da andernfalls ein Widerspruch dazu folgt, daß $k(z)$ eine gerade und (nach [15]) auch eindeutige Funktion ist. Das bedeutet weiter $k_2 = -k_1$ und $|k_1| = 1$, also

$$z^6k^2 = -A\,\bar{k}_1^2\,z^2(z^2-k_1^2)^2/(z^2-1)^4\,,$$
$$z^2k = (-A)^{\frac{1}{2}}\bar{k}_1(z^2-k_1^2)/(z^2-1)^2\,.$$

Für positiv reelle $z$ sind $F'$ und $F''$ imaginär, $G'$ und $G''$ reell, also ist $k(z)$ imaginär, so daß auch der Parameter $k_1$ reell sein muß und z.B. $= +1$ gesetzt werden kann. Dies liefert dann endgültig

(17) $$z^2 k(z) = (-A)^{\frac{1}{2}}/(z^2-1)\,.$$

Setzt man dies und (16) in (11) ein, so kommt

(18) $$F(z) = -(\pm 1)^{\frac{1}{2}} \int z^{-1} \sin(i\, c \log((z-1)/(z+1)) + \text{const})dz, \quad c > 0\,.$$

Der Vergleich mit der oben nach (14) angegebenen Entwicklung von $F$ in Umgebung von $z = \infty$ liefert für die in (18) auftretende Konstante $\sin(\text{const}) = \pm 1$, $\text{const} = \pi/2 + n\pi$ ($n$ ganzzahlig). Demnach ist bei geeigneter Zweigwahl der Quadratwurzel

$$\begin{aligned} F(z) &= -(\pm 1)^{\frac{1}{2}} \int z^{-1} \cos(i\, c \log((z-1)/(z+1)))\, dz = \\ &= -(\pm 1/4)^{\frac{1}{2}} \int z^{-1}[(z-1)^c\,(z+1)^{-c} + (z+1)^c\,(z-1)^{-c}]\, dz\,, \\ G(z) &= (\pm(1-q^2))^{\frac{1}{2}} \int z^{-1} \sin(i\, c \log((z-1)/(z+1)))\, dz = \\ &= i(\pm(1-q^2)/4)^{\frac{1}{2}} \int z^{-1}[(z-1)^c\,(z+1)^{-c} - (z+1)^c\,(z-1)^{-c}]dz\,. \end{aligned}$$

Für $|z| \geq 1$ ist also nach (10) und (14) die gesuchte Extremalfunktion

$$w(z) = w_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\int_1^z z^{-1}[(z-1)^c\,(z+1)^{-c} + (z+1)^c\,(z-1)^{-c}]\, dz\right).$$

Hier lautet die Entwicklung in $z = \infty$

$$w(z) = w_1 \cosh(\log z + E + \ldots) = \frac{1}{2}\, w_1 e^E z + \mathfrak{P}(1/z)\,.$$

Das gestattet den Koeffizientenvergleich

(19) $$w_1 = 2\, e^{-E}$$

mit

(20) $$E = \frac{1}{2}\int_1^\infty z^{-1}[(z-1)^c\,(z+1)^{-c} + (z+1)^c\,(z-1)^{-c} - 2]\, dz$$

(zu integrieren etwa längs der positiven reellen Achse). Damit hätten wir eine mögliche Darstellung der Schranken in (8), d. h. für $m(Q)$ und $M(Q)$ gefunden, nachdem noch der (unten unter (22), (23) angegebene) Wert für $c$ eingesetzt worden ist. Man erhält noch die Gestalt (2) bzw. (3), indem man in (20) die Substitution $t = (z-1)/(z+1)$ ausführt (vgl. z.B. [2]):

(21) $$\begin{aligned} E &= \int_0^1 (t^c + t^{-c} - 2)\,(1 - t^2)^{-1}\, dt = \\ &= \frac{1}{2}\,[\psi(1/2) - \psi((1+c)/2) + \psi(1/2) - \psi((1-c)/2)] = \\ &= \psi(1/2) - \frac{1}{2}\,[\psi((1+c)/2) + \psi((1-c)/2)] = \\ &= -C - \log 4 - \psi((1-c)/2) - (\pi/2)\, \mathrm{tg}(\pi c/2)\,. \end{aligned}$$

Der Wert für $c$ ergibt sich aus (12):

(22) $c = 1 - (1/\pi) \arccos q$ im Falle des Minimumproblems,

(23) $c = (1/\pi) \arccos q$ im Falle des Maximumproblems

(um zu dieser Zweigfestlegung bei arc cos zu kommen, verwendet man die Konvergenz in (21) oder einen der Grenzfälle $q = 0$ bzw. $q = 1$). Nachdem so (2) und (3) gefunden sind, erhält man leicht auch (nach einigen Rechnungen z.B. nach [2]) die angegebenen asymptotischen Entwicklungen.

## 4. Zusatzbemerkungen

Es läßt sich nun auch leicht der genaue Wertebereich der Größe $\log (w(1) - w(-1))$ in der Klasse $\Sigma(Q)$ bzw. der Größe $\log w(1)$ in der Klasse $S(Q)$ angeben. Nach den einleitenden Bemerkungen in [7] ist nämlich wie im konformen Falle bei H. Grötzsch (vgl. z.B. die Darstellung in [4, Chapter VI]) dieser genaue Wertebereich eine abgeschlossene Kreisscheibe, für die in Satz 2 bzw. 1 Diametralpunkte bestimmt worden sind.

Weiter kann man im Anschluß an obige Untersuchungen in der Klasse $\Sigma(Q)$ auch das zu Satz 2 analoge Extremalproblem $\min |w(z_1) - w(z_2)|$ bzw. $\max |w(z_1) - w(z_2)|$ betrachten, wenn $z_1$ und $z_2$ irgendwelche Punkte auf $|z| = 1$ sind. (Für beliebige Punkte $z_1$ und $z_2$ in der $z$-Ebene ist auch eine Behandlung mit der Strukturformel von [15] möglich, was aber einen ganz erheblich größeren Formelaufwand erfordert.) So läßt sich auch diskutieren, welches der größte Wert für den anfallenden Maximalwert ist. Das liefert also in der Klasse $\Sigma(Q)$ das Maximum des Durchmessers des Bildes von $|z| = 1$. (Dieses Maximum ist vermutlich gleich der rechten Seite von (8).) Durch eine Stürzung entsteht dann auch die Lösung der Aufgabe, das Funktional $\min_{|z|=1} |w(z)|$ am kleinsten zu machen in der Klasse der Abbildungen von $S$, die eine $Q$-quasikonforme Fortsetzung gestatten. (Der Unterschied zum Extremalproblem entsprechend dem linken Teile der Ungleichung (1) besteht im Wegfallen der Bedingung $w(\infty) = \infty$.)

### Literatur

[1] Alenicyn, Ju. E.: Некоторые теоремы площадей для аналитических функций с квазиконформным продолжением - Dokl. Akad. Nauk SSSR 215, 1974, 1025—1028 und Mat. Sb. 94, 1974, 114—125.

[2] Gröbner, W., und N. Hofreiter: Integraltafel, 2. Teil, Bestimmte Integrale. - Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1950.

[3] Gutljanskiĭ, V. Ja.: О принципе площадей для одного класса квазиконформных отображений. - Dokl. Akad. Nauk SSSR 212, 1973, 540—543. Übersetzung: On the area principle for a class of quasi-conformal mappings. - Soviet Math. Dokl. 14, 1973, 1401—1406.

[4] Jenkins, J. A.: Univalent functions and conformal mapping. - Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958.

[5] Kruškal', S. L.: Некоторые экстремальные задачи для однолистных аналитических функций. - Dokl. Akad. Nauk SSSR 182, 1968, 754—757. Übersetzung: Some extremal problems for schlicht analytic functions. - Soviet Math. Dokl. 9, 1968, 1191—1194.

[6] —»— Некоторые экстремальные задачи для конформных и квазиконформных отображений. - Sibirsk. Mat. Ž. 12, 1971, 760—784. Übersetzung: Some extremal problems for conformal and quasiconformal mappings. - Siberian Math. J. 12, 1971, 541—559.

[7] Kühnau, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. - Math. Nachr. 40, 1969, 1—11.

[8] —»— Einige Extremalprobleme bei differentialgeometrischen und quasikonformen Abbildungen. II. - Math. Z. 107, 1968, 307—318.

[9] —»— Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen. - Math. Nachr. 48, 1971, 77—105.

[10] —»— Koeffizientenbedingungen bei quasikonformen Abbildungen. - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 22—24, 1968—1970, 105—111.

[11] —»— Eine funktionentheoretische Randwertaufgabe in der Theorie der quasikonformen Abbildungen. - Indiana Univ. Math. J. 21, 1971, 1—10.

[12] —»— Weitere elementare Bemerkungen zur Theorie der konformen und quasikonformen Abbildungen. - Math. Nachr. 51, 1971, 377—382.

[13] —»— Zum Koeffizientenproblem bei den quasikonform fortsetzbaren schlichten konformen Abbildungen. - Math. Nachr. 55, 1973, 225—231.

[14] —»— Zur Abschätzung der Schwarzschen Ableitung bei schlichten Funktionen. - Math. Nachr. 59, 1974, 195—198.

[15] —»— Zur analytischen Darstellung gewisser Extremalfunktionen der quasikonformen Abbildung. - Math. Nachr. 60, 1974, 53—62.

[16] Kühnau, R., und B. Dittmar: Einige Folgerungen aus den Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für schlichte quasikonform fortsetzbare Abbildungen. - Math. Nachr. (im Druck).

[17] Lehto, O.: Schlicht functions with a quasiconformal extension. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 500, 1971, 1—10.

[18] —»— Quasiconformal mappings and singular integrals. - Erscheint in Symposia Math. Istituto Nazionale di Alta Matematica Roma.

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Mathematisches Institut
Halle an der Saale
DDR

Eingegangen am 9. September 1974