Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 3, 1977, 327—341

EINE BEMERKUNG ÜBER QUASIELLIPTISCHE LINEARE DIFFERENTIALOPERATOREN

VEIKKO T. PURMONEN

Neulich haben V. G. Maz'ja und I. V. Gel'man [5] als eine Folgerung ihrer übrigen Resultate notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abschätzung

$$\|R(D)u\|^2 \leqq C\big(\|P(D)u\|^2 + \sum |\gamma_0 Q_j(D)u|^2_{\mu-\mu_j-q_n/2}\big), \qquad u \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}^n_+],$$

gewonnen, wobei $P(D)$ einen quasielliptischen Operator und $R(D)$ einen Operator, der nicht stärker als $P(D)$ ist, sowie $Q_j(D)$ Randoperatoren bezeichnen.

Das Ziel dieser Note ist, einen direkten Beweis für dieses Ergebnis unter Benutzung der Methoden von Schechter [6], [7] geben, mit denen auch Matsuzawa 4] ein ähnliches Resultat für die Hinlänglichkeit in einem Spezialfall erhalten hat.

1. Problemstellung

1.1. Für zwei Punkte $y=(y_1, \ldots, y_n)$ und $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ des euklidischen Raumes $\boldsymbol{R}^n$ setzen wir $\langle y, \eta\rangle = y_1\eta_1 + \ldots + y_n\eta_n$, und es sei $\boldsymbol{R}^n_+ = \{y \in \boldsymbol{R}^n | y_n > 0\}$, $\bar{\boldsymbol{R}}^n_+ = \{y \in \boldsymbol{R}^n | y_n \geqq 0\}$. Im weiteren ist zweckmäßig $y=(x, t)=(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ und $\eta=(\xi, \zeta)=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \zeta)$ zu schreiben. Mit Hilfe der Fouriertransformationen $\mathscr{F}_x$ in $\boldsymbol{R}^{n-1}$ und $\mathscr{F}_t$ in $\boldsymbol{R}$ werden für eine geeignete Funktion u von y die partiellen Fouriertransformierten durch

$$(\mathscr{F}_x u)(\xi, t) = \pi_{n-1}\int e^{-i\langle x, \xi\rangle} u(x, t)\, dx$$

bzw.

$$(\mathscr{F}_t u)(x, \zeta) = \pi_1 \int e^{-it\zeta} u(x, t)\, dt$$

definiert (vgl. [3], S. 24), wobei $\pi_k = (2\pi)^{-k/2}$, $k=1, 2, \ldots$, ist.

Mit $C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}^n_+]$ bezeichnen wir die Menge der Einschränkungen von $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$-Funktionen auf $\bar{\boldsymbol{R}}^n_+$. Die Restriktion $\gamma_0 u$ von $u \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}^n_+]$ auf $\boldsymbol{R}^{n-1}$ wird durch $(\gamma_0 u)(x) = u(x, 0)$ erklärt.

1.2. Es seien ganze Zahlen $m_k \geqq 1$, $k=1, \ldots, n$, festgelegt, und sei $\mu = \max\{m_k | 1 \leqq k \leqq n\}$ sowie $q_k = \mu/m_k$, $k=1, \ldots, n$, und $q=(q', q_n)= =(q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n)$.

doi:10.5186/aasfm.1977.0323

Eine in $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ definierte Funktion $h:\eta=(\xi,\zeta)\mapsto h(\xi,\zeta)$ nennt man q-homogen vom Grad $s\in\boldsymbol{R}$ und schreibt $\deg_q h=s$, falls für alle $t>0$

$$h(t^q\eta)=h(t^{q'}\xi,t^{q_n}\zeta)=t^s h(\xi,\zeta)=t^s h(\eta)$$

gilt, wobei

$$t^q\eta=(t^{q'}\xi,t^{q_n}\zeta)=(t^{q_1}\xi_1,\dots,t^{q_{n-1}}\xi_{n-1},t^{q_n}\zeta)$$

geschrieben ist; analog definiert man für eine Funktion $g:\xi\mapsto g(\xi)$ die q'-Homogenität vom Grad $s\in\boldsymbol{R}$, $\deg_{q'} g=s$.

Ferner setzen wir

$$\langle\xi\rangle=\Big(\sum_{k=1}^{n-1}|\xi_k|^{m_k}\Big)^{1/\mu},\qquad \xi\in\boldsymbol{R}^{n-1},$$

und erklären in $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ ein Funktional $|\cdot|_s$, $s\geqq 0$, durch

$$|u|_s^2=\int\langle\xi\rangle^{2s}|(\mathscr{F}_x u)(\xi)|^2\,d\xi,\qquad u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1}).$$

Die Norm des Raumes $L^2(\boldsymbol{R}^n_+)$ wird mit $\|\cdot\|$ bezeichnet.

1.3. Wir betrachten einen partiellen Differentialoperator

$$P(D)=P(D_x,D_t)=\sum a_pD^p=\sum a_pD_x^{p'}D_t^{p_n}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_p\in\boldsymbol{C}$; hierbei ist p ein Multiindex $p=(p',p_n)=(p_1,\dots,p_{n-1},p_n)\in\boldsymbol{N}^n$ und $D^p=D_x^{p'}D_t^{p_n}=D_1^{p_1}\dots D_{n-1}^{p_{n-1}}D_n^{p_n}$ mit $D=(D_x,D_t)=(D_1,\dots,D_{n-1},D_n)$, $D_k=-i\,\partial/\partial y_k$. Das entsprechende Polynom hat die Gestalt

$$P(\eta)=P(\xi,\zeta)=\sum a_p\eta^p=\sum a_p\xi^{p'}\zeta^{p_n},$$

wobei $\eta^p=\xi^{p'}\zeta^{p_n}=\xi_1^{p_1}\dots\xi_{n-1}^{p_{n-1}}\zeta^{p_n}$ ist; die Ordnung des Operators $P(D)$ stimmt also mit dem Grad $\operatorname{ord}P(\eta)$ von $P(\eta)$ überein.

Wir setzen voraus:

a) $P(\xi,\zeta)$ ist ein q-homogenes Polynom mit $\deg_q P=\mu$.

b) $P(\xi,\zeta)$ ist quasielliptisch vom bestimmten Typ $K^+\geqq 1$:

(i) es gilt $P(\xi,\zeta)\neq 0$ für $(\xi,\zeta)\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ oder äquivalenterweise (vgl. [3], S. 103)

$$|P(\xi,\zeta)|\geqq C_0(\langle\xi\rangle^\mu+|\zeta|^{m_n}),\qquad(\xi,\zeta)\in\boldsymbol{R}^n,$$

mit einer Konstanten $C_0>0$;

(ii) für alle $\xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ besitzt die Gleichung $P(\xi,z)=0$ genau K^+ Lösungen $z=\zeta(\xi)$ mit positivem Imaginärteil $\operatorname{Im}\zeta(\xi)>0$.

Für $\xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ seien die verschiedenen Nullstellen des Polynoms $P(\xi,z)$ mit $\zeta_\alpha(\xi)$ und die zugehörigen Ordnungen mit $k_\alpha(\xi)$ bezeichnet. Dann stellen wir

Bedingung (A). *Für* $\alpha\neq\beta$ *gilt*

$$\zeta_\alpha(\xi)\neq\zeta_\beta(\xi),\qquad \xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}\setminus\{0\},$$

d. h. die Ordnung $k_\alpha(\xi)$ *hängt nicht von* ξ *ab.*

Man kann nun annehmen, daß mit gewissen Zahlen $1 \leqq \lambda^+ \leqq \lambda$ für die Indexmengen

$$\Lambda = \{1, \dots, \lambda\}, \qquad \Lambda^+ = \{1, \dots, \lambda^+\}, \qquad \Lambda^- = \Lambda \setminus \Lambda^+$$

die Darstellung

$$P(\xi, \zeta) = \prod_{\alpha \in \Lambda} (\zeta - \zeta_\alpha(\xi))^{k_\alpha}$$

besteht (dies bedeutet keine wesentliche Beschränkung, vgl. [2], S. 239) und die Beziehungen

$$\operatorname{Im} \zeta_\alpha(\xi) > 0 \quad \text{für } \alpha \in \Lambda^+$$

und

$$\operatorname{Im} \zeta_\alpha(\xi) < 0 \quad \text{für } \alpha \in \Lambda^-$$

gelten. Für das durch

$$P_+(\xi, \zeta) = \prod_{\alpha \in \Lambda^+} (\zeta - \zeta_\alpha(\xi))^{k_\alpha}$$

erklärte Polynom $P_+(\xi, \zeta)$ ist dann die ζ-Ordnung $\operatorname{ord}_\zeta P_+(\xi, \zeta) = k_1 + \dots + k_{\lambda^+} = K^+$.

Es sei jetzt $R(\xi, \zeta)$ ein q-homogenes Polynom mit $\deg_q R = \mu$ und $M(\xi, \zeta)$ (mit 1 als Hauptkoeffizient von ζ) der größte gemeinsame Teiler der Polynome $P_+(\xi, \zeta)$ und $R(\xi, \zeta)$. Wir schreiben

$$P'_+(\xi, \zeta) = P_+(\xi, \zeta)/M(\xi, \zeta)$$

und stellen

B e d i n g u n g (B). *Der Grad von* $P'_+(\xi, \zeta)$ *in* ζ *ist positiv und bleibt konstant für* $\xi \in \boldsymbol{R}^{n-1} \setminus \{0\}$.

Demzufolge können wir voraussetzen, daß eine Zahl λ', $1 \leqq \lambda' \leqq \lambda^+$, so existiert, daß mit $\Lambda' = \{1, \dots, \lambda'\}$

$$P'_+(\xi, \zeta) = \prod_{\alpha \in \Lambda'} (\zeta - \zeta_\alpha(\xi))^{\varkappa_\alpha}$$

gilt, wobei $\varkappa_\alpha \leqq k_\alpha$ und $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_{\lambda'} = \varkappa = \operatorname{ord}_\zeta P'_+(\xi, \zeta) \geqq 1$ ist.

Noch sei $\varkappa_\alpha = k_\alpha$ für $\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda'$ und $\varrho_\alpha = \{0, \dots, \varkappa_\alpha - 1\}$ für $\alpha \in \Lambda$ gesetzt.

1.4. Das Ergebnis von V. G. Maz'ja und I. V. Gel'man, dem wir hier einen direkten Beweis geben wollen, lautet nun wie folgt (vgl. [5], S. 254):

S a t z 1.1. *Es seien* $P(\xi, \zeta)$ *ein* q*-homogenes quasielliptisches Polynom vom bestimmten Typ und* $R(\xi, \zeta)$ *ein* q*-homogenes Polynom mit* $\deg_q P = \deg_q R = \mu$ *derart, daß die Bedingungen (A) und (B) erfüllt sind,* $\operatorname{ord}_\zeta P'_+(\xi, \zeta) = \varkappa$. *Ferner seien* $Q_j(\xi, \zeta)$, $j = 1, \dots, \varkappa$, q*-homogene Polynome mit* $\deg_q Q_j = \mu_j \leqq \mu - q_n$.

Die Abschätzung

$$\|R(D)u\|^2 \leqq C\Big(\|P(D)u\|^2 + \sum_{j=1}^{\varkappa} |\gamma_0 Q_j(D)u|^2_{\mu - \mu_j - q_n/2}\Big), \qquad u \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}^n_+], \tag{1.1}$$

gilt dann und nur dann, wenn die folgenden Bedingungen (I) und (II) für alle $\xi \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ *erfüllt sind:*

(I) *Für jedes* j, $1 \leqq j \leqq \varkappa$, *ist* $Q_j(\xi, \zeta) \equiv 0 \mod M(\xi, \zeta)$.

(II) *Die Polynome* $Q_j(\xi, \zeta)$, $j = 1, \ldots, \varkappa$, *sind linear unabhängig modulo* $P_+(\xi, \zeta)$.

2. Die Hinlänglichkeit der Bedingungen

2.1. Die Bedingungen (I) und (II) sind hinreichend, falls mit den Bezeichnungen

$$P'(\xi, \zeta) = P(\xi, \zeta)/M(\xi, \zeta),$$
$$R'(\xi, \zeta) = R(\xi, \zeta)/M(\xi, \zeta),$$
$$Q'_j(\xi, \zeta) = Q_j(\xi, \zeta)/M(\xi, \zeta), \qquad j = 1, \ldots, \varkappa,$$

gilt:

Satz 2.1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 besteht die Abschätzung*

$$\|R'(D)v\|^2 \leqq C\Big(\|P'(D)v\|^2 + \sum_{j=1}^{\varkappa} |\gamma_0 Q'_j(D)v|^2_{\mu-\mu_j-q_n/2}\Big), \qquad v \in C_0^\infty[\bar{\mathbf{R}}^n_+], \tag{2.1}$$

falls die folgende Bedingung (III) für alle $\xi \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ *erfüllt ist:*

(III) *Die Polynome* $Q'_j(\xi, \zeta)$, $j = 1, \ldots, \varkappa$, *sind linear unabhängig modulo* $P'_+(\xi, \zeta)$.

In der Tat, aus den Bedingungen (I) und (II) folgt Bedingung (III) und für $u \in C_0^\infty[\bar{\mathbf{R}}^n_+]$ ist $v = M(D)u \in C_0^\infty[\bar{\mathbf{R}}^n_+]$, so daß Abschätzung (1.1) sich aus (2.1) ergibt.

2.2. Es sei $\xi \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Wir setzen

$$P'_\alpha(\xi, \zeta) = (\zeta - \zeta_\alpha(\xi))^{-\varkappa_\alpha} P'(\xi, \zeta) \qquad \text{für } \alpha \in \Lambda' \cup \Lambda^-,$$
$$P'_{+\alpha}(\xi, \zeta) = (\zeta - \zeta_\alpha(\xi))^{-\varkappa_\alpha} P'_+(\xi, \zeta) \qquad \text{für } \alpha \in \Lambda',$$
$$P_{-\alpha}(\xi, \zeta) = (\zeta - \zeta_\alpha(\xi))^{-\varkappa_\alpha} P_-(\xi, \zeta) \qquad \text{für } \alpha \in \Lambda^-.$$

Dann gibt es ein solches $r_0(\xi)$ und solche Polynome (in ζ) $R_+(\xi, \zeta)$ und $R_-(\xi, \zeta)$, daß die Formel

$$\frac{R(\xi, \zeta)}{P(\xi, \zeta)} = r_0(\xi) + \frac{R_+(\xi, \zeta)}{P_+(\xi, \zeta)} + \frac{R_-(\xi, \zeta)}{P_-(\xi, \zeta)}$$

und folglich

$$\frac{R'(\xi, \zeta)}{P'(\xi, \zeta)} = r_0(\xi) + \frac{R'_+(\xi, \zeta)}{P'_+(\xi, \zeta)} + \frac{R_-(\xi, \zeta)}{P_-(\xi, \zeta)}$$

gilt, wobei

$$R'(\xi, \zeta) = R(\xi, \zeta)/M(\xi, \zeta)$$

und

$$R'_+(\xi, \zeta) = R_+(\xi, \zeta)/M(\xi, \zeta)$$

geschrieben wurden. Mit Hilfe der verallgemeinerten Lagrangeschen Interpolationsformel (Lagrange—Sylvester—Formel) erhält man jetzt

$$\frac{R'(\xi,\zeta)}{P'(\xi,\zeta)} = r_0(\xi) + \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^+_{\alpha\beta}(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^{\beta-\varkappa_\alpha} + \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^-_{\alpha\beta}(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^{\beta-\varkappa_\alpha}$$

mit

(2.2) $$r^+_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial^\beta}{\partial\zeta^\beta}\frac{R'_+(\xi,\zeta)}{P'_{+\alpha}(\xi,\zeta)}\right)\bigg|_{\zeta=\zeta_\alpha(\xi)}, \quad \alpha\in\Lambda',\ \beta\in\varrho_\alpha,$$

und

(2.3) $$r^-_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial^\beta}{\partial\zeta^\beta}\frac{R_-(\xi,\zeta)}{P_{-\alpha}(\xi,\zeta)}\right)\bigg|_{\zeta=\zeta_\alpha(\xi)}, \quad \alpha\in\Lambda^-,\ \beta\in\varrho_\alpha.$$

Somit gilt

(2.4) $$\begin{aligned} R'(\xi,\zeta) &= r_0(\xi)P'(\xi,\zeta) \\ &+ \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^+_{\alpha\beta}(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^\beta P'_\alpha(\xi,\zeta) \\ &+ \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^-_{\alpha\beta}(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^\beta P'_\alpha(\xi,\zeta). \end{aligned}$$

2.3. Zunächst wird der Fall $n=1$ besonders untersucht. Formel (2.4) hat dann die Gestalt

(2.5) $$\begin{aligned} R'(\zeta) &= r_0P'(\zeta) + \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^+_{\alpha\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^\beta P'_\alpha(\zeta) \\ &+ \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^-_{\alpha\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^\beta P'_\alpha(\zeta). \end{aligned}$$

Hiermit ist für $\varphi\in C_0^\infty[\bar{R}_+]$

(2.6) $$\begin{aligned} R'(D_t)\tilde\varphi &= r_0P'(D_t)\tilde\varphi \\ &+ \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^+_{\alpha\beta}(D_t-\zeta_\alpha)^\beta P'_\alpha(D_t)\tilde\varphi \\ &+ \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^-_{\alpha\beta}(D_t-\zeta_\alpha)^\beta P'_\alpha(D_t)\tilde\varphi, \end{aligned}$$

wobei $\tilde\varphi$ die Nullfortsetzung von φ für $t<0$ bezeichnet.

Setzt man

(2.7) $$f(t) = P'(D_t)\tilde\varphi(t) = \begin{cases} P'(D_t)\varphi(t) & \text{für } t\geqq 0 \\ 0 & \text{für } t<0, \end{cases}$$

so gilt (man siehe 4.1)

Lemma 2.2. *Wenn $\varphi\in C_0^\infty[\bar{R}_+]$ und f durch (2.7) erklärt ist, dann besteht für alle $\alpha\in\Lambda'\cup\Lambda^-$, $\beta\in\varrho_\alpha$ die Gleichung*

$$\mathscr{F}_t((D_t-\zeta_\alpha)^\beta P'_\alpha(D_t)\tilde\varphi)(\zeta) = (\zeta-\zeta_\alpha)^{\beta-\varkappa_\alpha}(\mathscr{F}_tf)(\zeta) - i\pi_1\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^{k-\varkappa_\alpha+\beta-1}W_{\alpha k}$$

mit

$$W_{\alpha k} = \gamma_0(D_t-\zeta_\alpha)^{\varkappa_\alpha-k}P'_\alpha(D_t)\varphi(t).$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2 erhalten wir aus (2.6)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_t(R'(D_t)\tilde{\varphi})(\zeta) = {} & r_0(\mathscr{F}_t f)(\zeta) \\ & + \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^+_{\alpha\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^{\beta-\varkappa_\alpha}(\mathscr{F}_t f)(\zeta) \\ & + \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^-_{\alpha\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^{\beta-\varkappa_\alpha}(\mathscr{F}_t f)(\zeta) \\ & - i\pi_1 \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^+_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^{k-\varkappa_\alpha+\beta-1}W_{\alpha k} \\ & - i\pi_1 \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^-_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^{k-\varkappa_\alpha+\beta-1}W_{\alpha k}.\end{aligned}$$

Daher gilt wegen (2.5)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_t(R'(D_t)\tilde{\varphi})(\zeta) = {} & \frac{R'(\zeta)}{P'(\zeta)}(\mathscr{F}_t f)(\zeta) \\ & - i\pi_1 \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^+_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^{k-\varkappa_\alpha+\beta-1}W_{\alpha k} \\ & - i\pi_1 \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} r^-_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta}(\zeta-\zeta_\alpha)^{k-\varkappa_\alpha+\beta-1}W_{\alpha k}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.4. Unter Berücksichtigung der Parsevalschen Gleichung folgt aus (2.8)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |R'(D_t)\varphi|^2\,dt \leqq C\Bigg(&\sup\left|\frac{R'(\zeta)}{P'(\zeta)}\right|^2\int_{-\infty}^{\infty}|f|^2\,dt \\ & + \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta}|r^+_{\alpha\beta}|^2|W_{\alpha k}|^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{|\zeta-\zeta_\alpha|^{2(\varkappa_\alpha-\beta-k+1)}} \\ & + \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta}|r^-_{\alpha\beta}|^2|W_{\alpha k}|^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{|\zeta-\zeta_\alpha|^{2(\varkappa_\alpha-\beta-k+1)}}\Bigg).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Für die Behandlung der rechten Seite von (2.9) benötigen wir zwei Lemmata (man siehe 4.2).

Lemma 2.3. *Für jedes* $s=1, 2, \ldots$ *ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{|\zeta-\zeta_\alpha|^{2s}} = 2\pi\frac{(2(s-1))!}{((s-1)!)^2}\frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta_\alpha|^{2s-1}}.$$

Lemma 2.4. *Ist* $\alpha\in\Lambda^-$, *so gilt für jedes* $k=1, \ldots, \varkappa_\alpha$

$$W_{\alpha k} = \pi_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathscr{F}_t f)(\zeta)}{(\zeta-\zeta_\alpha)^k}\,d\zeta.$$

Mit Hilfe der vorigen Lemmata und der Schwarzschen Ungleichung erhält man jetzt in dem zweiten Glied der rechten Seite von (2.9)

$$|W_{\alpha k}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{|\zeta-\zeta_\alpha|^{2(\varkappa_\alpha-\beta-k+1)}}$$

$$\leqq C \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}_t f|^2 d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{|\zeta-\zeta_\alpha|^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{|\zeta-\zeta_\alpha|^{2(\varkappa_\alpha-\beta-k+1)}}$$

$$\leqq C \frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta_\alpha|^{2(\varkappa_\alpha-\beta)}} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt,$$

und folglich gilt

$$\int_0^\infty |R'(D_t)\varphi|^2 dt \leqq C\Bigg(\sup\left|\frac{R'(\zeta)}{P'(\zeta)}\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt \tag{2.10}$$

$$+\sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta} |r_{\alpha\beta}^+|^2 |W_{\alpha k}|^2 \frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta_\alpha|^{2(\varkappa_\alpha-\beta-k+1/2)}}$$

$$+\sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} |r_{\alpha\beta}^-|^2 \frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta_\alpha|^{2(\varkappa_\alpha-\beta)}} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt\Bigg).$$

2.5. Wir gehen auf den allgemeinen Fall zurück. Mit festem $\xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ hat man nach (2.10)

$$\int_0^\infty |R'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|^2 dt \tag{2.11}$$

$$\leqq C\Bigg(\sup_\zeta\left|\frac{R'(\xi,\zeta)}{P'(\xi,\zeta)}\right|^2 \int_0^\infty |P'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|^2 dt$$

$$+\sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha}\sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha-\beta} |r_{\alpha\beta}^+(\xi)|^2 |W_{\alpha k}(\xi)|^2 \frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta_\alpha(\xi)|^{2(\varkappa_\alpha-\beta-k+1/2)}}$$

$$+\sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} |r_{\alpha\beta}^-(\xi)|^2 \frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta_\alpha(\xi)|^{2(\varkappa_\alpha-\beta)}} \int_0^\infty |P'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|^2 dt\Bigg)$$

mit

$$W_{\alpha k}(\xi) = \gamma_0(D_t-\zeta_\alpha(\xi))^{\varkappa_\alpha-k} P'_\alpha(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t).$$

Aufgrund der Voraussetzungen gilt hierbei

$$\sup_\zeta\left|\frac{R'(\xi,\zeta)}{P'(\xi,\zeta)}\right| \leqq C_1 \quad \text{für alle } \xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}\setminus\{0\} \tag{2.12}$$

mit einer Konstanten $C_1>0$, und

$$\zeta_\alpha \text{ ist } q'\text{-homogen (in } \xi) \text{ mit } \deg_{q'}\zeta_\alpha = q_n \tag{2.13}$$

infolge der Bedingung (A). Wegen der Stetigkeit schließt man aus (2.13), daß

$$(2.14)\qquad |\mathrm{Im}\,\zeta_\alpha(\xi)| \geqq C_2\langle\xi\rangle^{q_n}, \qquad \xi\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\},$$

mit einer Konstanten $C_2>0$ gilt.

Noch haben wir (man siehe 4.3)

Lemma 2.5. *Es existieren Konstanten* $C_3>0$ *und* $C_4>0$ *derart, daß die Ungleichungen*

$$|r^+_{\alpha\beta}(\xi)| \leqq C_3\langle\xi\rangle^{(\varkappa_\alpha-\beta)q_n}$$

und

$$|r^-_{\alpha\beta}(\xi)| \leqq C_4\langle\xi\rangle^{(\varkappa_\alpha-\beta)q_n}$$

für alle $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ *bestehen.*

Berücksichtigt man (2.12), (2.14) und Lemma 2.5, so erhält man aus (2.11)

$$(2.15)\qquad \int_0^\infty |R'(\xi, D_t)(\mathcal{F}_x v)(\xi, t)|^2\,dt$$
$$\leqq C\Big(\int_0^\infty |P'(\xi, D_t)(\mathcal{F}_x v)(\xi, t)|^2\,dt + \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} |\langle\xi\rangle^{(\varkappa_\alpha-\beta-1/2)q_n} W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi)|^2\Big).$$

2.6. Wir wenden uns nun an die Polynome $Q_j(\xi,\zeta)$, $j=1,\dots,\varkappa$. Es sei $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\}$. Dann existieren Polynome (in ζ) $Q_{j+}(\xi,\zeta)$ und $Q_{j-}(\xi,\zeta)$ mit

$$\frac{Q_j(\xi,\zeta)}{P(\xi,\zeta)} = \frac{Q_{j+}(\xi,\zeta)}{P_+(\xi,\zeta)} + \frac{Q_{j-}(\xi,\zeta)}{P_-(\xi,\zeta)},$$

und folglich ist

$$\frac{Q'_j(\xi,\zeta)}{P'(\xi,\zeta)} = \frac{Q'_{j+}(\xi,\zeta)}{P'_+(\xi,\zeta)} + \frac{Q_{j-}(\xi,\zeta)}{P_-(\xi,\zeta)}$$

mit

$$Q'_{j+}(\xi,\zeta) = Q_{j+}(\xi,\zeta)/M(\xi,\zeta).$$

Daher gilt (vgl. 2.2)

$$(2.16)\qquad Q'_j(\xi,\zeta) = \sum_{\alpha\in\Lambda'}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q^+_{j\alpha\beta}(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^\beta P'_\alpha(\xi,\zeta) + \sum_{\alpha\in\Lambda^-}\sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q^-_{j\alpha\beta}(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^\beta P'_\alpha(\xi,\zeta)$$

mit den Bezeichnungen

$$(2.17)\qquad q^+_{j\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial^\beta}{\partial\zeta^\beta}\frac{Q'_{j+}(\xi,\zeta)}{P'_{+\alpha}(\xi,\zeta)}\right)\bigg|_{\zeta=\zeta_\alpha(\xi)}, \qquad \alpha\in\Lambda',\ \beta\in\varrho_\alpha,$$

und

$$(2.18)\qquad q^-_{j\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial^\beta}{\partial\zeta^\beta}\frac{Q_{j-}(\xi,\zeta)}{P_{-\alpha}(\xi,\zeta)}\right)\bigg|_{\zeta=\zeta_\alpha(\xi)}, \qquad \alpha\in\Lambda^-,\ \beta\in\varrho_\alpha.$$

Somit findet man infolge von (2.16)

$$\gamma_0 Q_j'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t) = \sum_{\alpha\in\Lambda'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^+(\xi) W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi) + \sum_{\alpha\in\Lambda^-} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^-(\xi) W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi). \tag{2.19}$$

Es gilt (man siehe 4.4)

Lemma 2.6. *Die Funktionen* $q_{j\alpha\beta}^+$ *und* $q_{j\alpha\beta}^-$ *sind* q'*-homogen (in* ξ*) mit*

$$\deg_{q'} q_{j\alpha\beta}^+ = \mu_j - \mu + (\varkappa_\alpha - \beta) q_n, \quad \alpha\in\Lambda', \ \beta\in\varrho_\alpha,$$

und

$$\deg_{q'} q_{j\alpha\beta}^- = \mu_j - \mu + (\varkappa_\alpha - \beta) q_n, \quad \alpha\in\Lambda^-, \ \beta\in\varrho_\alpha.$$

Wendet man jetzt die Lemmata 2.3, 2.4 und 2.6 an und benutzt die Stetigkeit von $q_{j\alpha\beta}^-$, so ergibt sich aus (2.19)

$$\langle\xi\rangle^{\mu-\mu_j-q_n/2} \Big|\sum_{\alpha\in\Lambda'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^+(\xi) W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi)\Big| \leqq \langle\xi\rangle^{\mu-\mu_j-q_n/2} |\gamma_0 Q_j'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|$$
$$+ C\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt\Big)^{1/2} \sum_{\alpha\in\Lambda^-} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} \langle\xi\rangle^{(\varkappa_\alpha-\beta-1/2)q_n} \left(\frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta_\alpha(\xi)|^{2(\varkappa_\alpha-\beta)-1}}\right)^{1/2}.$$

Damit haben wir wegen (2.14)

$$\langle\xi\rangle^{\mu-\mu_j-q_n/2} \Big|\sum_{\alpha\in\Lambda'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^+(\xi) W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi)\Big| \tag{2.20}$$
$$\leqq \langle\xi\rangle^{\mu-\mu_j-q_n/2} |\gamma_0 Q_j'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)| + C\Big(\int_0^{\infty} |P'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

2.7. Es sei $\xi\in \boldsymbol{R}^{n-1}\setminus\{0\}$. Wir behaupten, daß ein Vektor $\omega=(\omega_{\alpha\beta})_{\alpha\in\Lambda',\beta\in\varrho_\alpha}$ aus $\boldsymbol{C}^\varkappa$ den Beziehungen

$$\sum_{\alpha\in\Lambda'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^+(\xi)\omega_{\alpha\beta} = 0, \quad j = 1, \dots, \varkappa,$$

nur dann genügen kann, wenn $\omega=0$ ist. Sonst hätte man nämlich

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} c_j q_{j\alpha\beta}^+(\xi) = 0, \quad \alpha\in\Lambda', \ \beta\in\varrho_\alpha,$$

mit gewissen Zahlen $c_j\in\boldsymbol{C}$, $j=1, \dots, \varkappa$. Dann wäre jedoch gemäß (2.16)

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} c_j Q_j'(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j \sum_{\alpha\in\Lambda'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^+(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^\beta P_\alpha'(\xi, \zeta)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j \sum_{\alpha\in\Lambda^-} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^-(\xi)(\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^\beta P_\alpha'(\xi, \zeta)$$
$$= \Big(\sum_{\alpha\in\Lambda^-} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} (\zeta-\zeta_\alpha(\xi))^\beta P_{-\alpha}(\xi, \zeta) \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j q_{j\alpha\beta}^-(\xi)\Big) P_+'(\xi, \zeta)$$

im Widerspruch zu Bedingung (III).

Für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ gilt somit

$$(2.21)\qquad \sum_{j=1}^{\varkappa} \langle\xi\rangle^{2(\mu-\mu_j)} \Big| \sum_{\alpha\in A'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^{+}(\xi)\omega_{\alpha\beta}\Big|^2 > 0, \qquad \omega = (\omega_{\alpha\beta}) \in \boldsymbol{C}^{\varkappa} \setminus \{0\}.$$

Es sei nun $\Omega = (\Omega_{\alpha\beta})_{\alpha\in A', \beta\in\varrho_\alpha} \in \boldsymbol{C}^{\varkappa} \setminus \{0\}$. Setzen wir

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}(\xi) = \langle\xi\rangle^{(\beta-\varkappa_\alpha)q_n} \Omega_{\alpha\beta},$$

so ist nach (2.21)

$$(2.22)\qquad \sum_{j=1}^{\varkappa} \langle\xi\rangle^{2(\mu-\mu_j)} \Big| \sum_{\alpha\in A'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^{+}(\xi)\langle\xi\rangle^{(\beta-\varkappa_\alpha)q_n}\Omega_{\alpha\beta}\Big|^2 > 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von (2.22) ist quadratisch in bezug auf die $\Omega_{\alpha\beta}$ derart, daß die Koeffizienten q'-homogen in ξ vom Grad 0 sind, was sich aus Lemma 2.6 folgern läßt. Demzufolge existiert aufgrund der Stetigkeit von $q_{j\alpha\beta}^{+}$ ein solches $C_5 > 0$, daß die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \langle\xi\rangle^{2(\mu-\mu_j)} \Big| \sum_{\alpha\in A'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^{+}(\xi)\langle\xi\rangle^{(\beta-\varkappa_\alpha)q_n}\Omega_{\alpha\beta}\Big|^2 \geqq C_5$$

für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^{n-1}$, $\langle\xi\rangle = 1$, und $\Omega = (\Omega_{\alpha\beta}) \in \boldsymbol{C}^{\varkappa}$, $|\Omega| = 1$, besteht, und somit gilt

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \langle\xi\rangle^{2(\mu-\mu_j)} \Big| \sum_{\alpha\in A'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^{+}(\xi)\langle\xi\rangle^{(\beta-\varkappa_\alpha)q_n}\Omega_{\alpha\beta}\Big|^2 \geqq C_5|\Omega|^2 = C_5 \sum_{\alpha\in A'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} |\Omega_{\alpha\beta}|^2$$

für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ und $\Omega = (\Omega_{\alpha\beta}) \in \boldsymbol{C}^{\varkappa}$. Wählt man

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}(\xi) = \langle\xi\rangle^{(\varkappa_\alpha-\beta-1/2)q_n} W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi),$$

so findet man

$$(2.23)\qquad \sum_{\alpha\in A'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} |\langle\xi\rangle^{(\varkappa_\alpha-\beta-1/2)q_n} W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi)|^2$$
$$\leqq C \sum_{j=1}^{\varkappa} \langle\xi\rangle^{2(\mu-\mu_j-q_n/2)} \Big| \sum_{\alpha\in A'} \sum_{\beta\in\varrho_\alpha} q_{j\alpha\beta}^{+}(\xi) W_{\alpha,\varkappa_\alpha-\beta}(\xi)\Big|^2.$$

2.8. Die Beziehungen (2.15), (2.20) und (2.23) zusammen liefern

$$\int_0^\infty |R'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|^2\, dt \leqq C\Big(\int_0^\infty |P'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|^2\, dt$$
$$+ \sum_{j=1}^{\varkappa} \langle\xi\rangle^{2(\mu-\mu_j-q_n/2)} |\gamma_0 Q_j'(\xi, D_t)(\mathscr{F}_x v)(\xi, t)|^2\Big).$$

Falls wir hier über $\boldsymbol{R}_\xi^{n-1}$ integrieren, erhalten wir nach Anwendung der Parsevalschen Gleichung Abschätzung (2.1), womit Satz 2.1 bewiesen ist.

3. Die Notwendigkeit der Bedingungen

Ein direkter Beweis der Notwendigkeit der Bedingungen (I) und (II) für das Erfülltsein von Abschätzung (1.1) läßt sich durch geringe Modifizierung von den in [5] benutzten Methoden führen. Deshalb werden wir nur die wesentlichen Schritte geben.

3.1. Es sei $\xi \in \boldsymbol{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Falls man als u in (1.1) die durch

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{h}\right)^{(n-1)/2} g\left(\frac{x}{h}\right) e^{i\langle x,\xi\rangle} v(t)$$

erklärte Funktion nimmt, wobei $g \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$, $v \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+]$ und $h>0$ ist, und $h \to \infty$ gehen läßt, so findet man

$$\int_0^\infty |R(\xi, D_t)v|^2\,dt \leqq C\Big(\int_0^\infty |P(\xi, D_t)v|^2\,dt + \sum_{j=1}^{\varkappa} \langle\xi\rangle^{2(\mu-\mu_j-q_n/2)} |\gamma_0 Q_j(\xi, D_t)v|^2\Big)$$

für alle $v \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+]$. Es genügt also den Fall $n=1$, d. h. die Abschätzung

$$\text{(3.1)} \qquad \int_0^\infty |R(D_t)v|^2\,dt \leqq C\Big(\int_0^\infty |P(D_t)v|^2\,dt + \sum_{j=1}^{\varkappa} |\gamma_0 Q_j(D_t)v|^2\Big), \qquad v \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+],$$

zu betrachten.

3.2. Man kann voraussetzen, daß mit einem λ'', $0 \leqq \lambda'' \leqq \lambda'$, gilt: ζ_α ist eine Nullstelle des Polynoms $M(\zeta)$ mit der Ordnung l_α genau für $\lambda'' < \alpha \leqq \lambda^+$. Wir setzen $\Lambda'' = \{1, \dots, \lambda''\}$ für $\lambda'' > 0$ und $\Lambda'' = \emptyset$ für $\lambda'' = 0$ und haben dann

$$l_\alpha = \begin{cases} k_\alpha - \varkappa_\alpha & \text{für } \alpha \in \Lambda' \setminus \Lambda'' \\ k_\alpha & \text{für } \alpha \in \Lambda^+ \setminus \Lambda'. \end{cases}$$

Falls man weiter

$$s_\alpha = \{0, \dots, l_\alpha - 1\} \quad \text{für } \alpha \in \Lambda^* = \Lambda^+ \setminus \Lambda''$$

und

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} \varrho_\alpha & \text{für } \alpha \in \Lambda'' \\ \{l_\alpha, \dots, k_\alpha - 1\} & \text{für } \alpha \in \Lambda' \setminus \Lambda'' \end{cases}$$

setzt, so läßt die allgemeine Lösung der Gleichung $P_+(D_t)z = 0$ sich in der Form

$$z(t) = x(t) + y(t) = \sum_{\alpha \in \Lambda'} \sum_{\beta \in \sigma_\alpha} x_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta}(t) + \sum_{\alpha \in \Lambda^*} \sum_{\beta \in s_\alpha} y_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta}(t), \qquad x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta} \in \boldsymbol{C},$$

darstellen, wobei

$$z_{\alpha\beta}(t) = (it)^\beta e^{i\zeta_\alpha t}$$

ist. Nun gelten die Beziehungen

$$\text{(3.2)} \qquad R(D_t)x = 0 \quad \text{genau für } x_{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \in \Lambda',\ \beta \in \sigma_\alpha,$$

und

$$R(D_t)y = 0 \quad \text{für alle } y_{\alpha\beta},\ \alpha \in \Lambda^*,\ \beta \in s_\alpha. \tag{3.3}$$

Noch bemerken wir, daß Abschätzung (3.1) auch für z besteht (vgl. [1], S. 682).

3.3. Wir zeigen zuerst, daß Bedingung (I) erfüllt ist. Aus (3.1) und (3.2) ergibt sich, daß

$$\gamma_0 Q_j(D_t)x = 0, \quad j = 1, \dots, \varkappa, \tag{3.4}$$

dann und nur dann gilt, wenn $x_{\alpha\beta}=0$ für alle $\alpha \in \Lambda'$, $\beta \in \sigma_\alpha$ ist. Die Gleichungen (3.4) können mit Hilfe der Leibnizschen Formel (vgl. [3], S. 10) als Gleichungssystem

$$\sum_{\alpha \in \Lambda'} \sum_{\beta \in \sigma_\alpha} Q_j^{(\beta)}(\zeta_\alpha) x_{\alpha\beta} = 0, \quad j = 1, \dots, \varkappa,$$

in den Veränderlichen $x_{\alpha\beta}$ geschrieben werden, wobei $Q_j^{(\beta)} = (iD_\zeta)^\beta Q_j$ ist. Nach obigem ist die Koeffizientenmatrix dieses Systems nichtsingulär.

Somit kann man $x(t)$ in der allgemeinen Lösung $z(t)=x(t)+y(t)$ stets so auswählen, daß die Gleichungen

$$\gamma_0 Q_j(D_t)z = 0, \quad j = 1, \dots, \varkappa,$$

erfüllt sind; diese Gleichungen sind nämlich dem System

$$\sum_{\alpha \in \Lambda'} \sum_{\beta \in \sigma_\alpha} Q_j^{(\beta)}(\zeta_\alpha) x_{\alpha\beta} = - \sum_{\alpha \in \Lambda^*} \sum_{\beta \in s_\alpha} Q_j^{(\beta)}(\zeta_\alpha) y_{\alpha\beta}, \quad j = 1, \dots, \varkappa, \tag{3.5}$$

äquivalent. Aus (3.1) folgt dann wegen (3.2) und (3.3), daß $x_{\alpha\beta}=0$ für alle $\alpha \in \Lambda'$, $\beta \in \sigma_\alpha$ ist, und somit hat man gemäß (3.5)

$$\sum_{\alpha \in \Lambda^*} \sum_{\beta \in \sigma_\alpha} Q_j^{(\beta)}(\zeta_\alpha) y_{\alpha\beta} = 0, \quad j = 1, \dots, \varkappa.$$

Aber dies kann der Fall nur dann sein, wenn für alle $j=1, \dots, \varkappa$

$$Q_j^{(\beta)}(\zeta_\alpha) = 0, \quad \alpha \in \Lambda^*,\ \beta \in s_\alpha,$$

ist. Also gilt $Q_j(\zeta) \equiv 0 \bmod M(\zeta)$, $j=1, \dots, \varkappa$.

3.4. Wir zeigen noch, daß auch Bedingung (II) erfüllt ist. Zuerst bemerken wir, daß Abschätzung (3.1) für alle $v \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+]$ dann und nur dann gilt, wenn die Ungleichung

$$\int_0^\infty |R'(D_t)w|^2 dt \leqq C\Big(\int_0^\infty |P'(D_t)w|^2 dt + \sum_{j=1}^{\varkappa} |\gamma_0 Q_j'(D_t)w|^2\Big) \tag{3.6}$$

für alle $w \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+]$ besteht; jedes $w \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+]$ läßt sich nämlich in der Form $w=M(D_t)v$ mit $v \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+]$ darstellen (vgl. [1], S. 684).

Die allgemeine Lösung der Gleichung $P_+'(D_t)z=0$ hat die Gestalt

$$z(t) = \sum_{\alpha \in \Lambda'} \sum_{\beta \in \varrho_\alpha} c_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta}(t), \quad c_{\alpha\beta} \in \boldsymbol{C}.$$

Haben wir

$$\gamma_0 Q_j'(D_t)z = 0, \quad j = 1, \ldots, \varkappa,$$

oder

(3.7) $$\sum_{\alpha \in \Lambda'} \sum_{\beta \in \varrho_\alpha} Q_j'^{(\beta)}(\zeta_\alpha) c_{\alpha\beta} = 0, \quad j = 1, \ldots, \varkappa,$$

so folgt aus der (auch für z geltenden) Ungleichung (3.6), daß $c_{\alpha\beta}=0$ für alle $\alpha \in \Lambda'$, $\beta \in \varrho_\alpha$ sein muß. Gleichungssystem (3.7) besitzt also nur die triviale Lösung, und folglich sind die Polynome $Q_j'(\zeta)$, $j=1, \ldots, \varkappa$, linear unabhängig modulo $P_+'(\zeta)$, woraus Bedingung (II) sich ergibt.

4. Nachträgliche Beweise

4.1. *Beweis von Lemma 2.2.* Es gilt

$$(\mathscr{F}_t f)(\zeta) = \pi_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\zeta} P'(D_t)\tilde{\varphi}(t)\, dt = \pi_1 \int_0^{\infty} e^{-it\zeta}(D_t - \zeta_\alpha)^{\varkappa_\alpha} P_\alpha'(D_t)\varphi(t)\, dt.$$

Für $z \in \boldsymbol{C}$, $g \in C_0^\infty[\bar{\boldsymbol{R}}_+]$ und $s = 1, 2, \ldots$ findet man

$$\int_0^\infty e^{-it\zeta}(D_t - z)^s g(t)\, dt = (\zeta - z)^s \int_0^\infty e^{-it\zeta} g(t)\, dt$$
$$+ i \sum_{k=1}^{s} (\zeta - z)^{k-1} \gamma_0 (D_t - z)^{s-k} g(t)$$

und somit

$$(\mathscr{F}_t f)(\zeta) = (\zeta - \zeta_\alpha)^{\varkappa_\alpha - \beta} \mathscr{F}_t\big((D_t - \zeta_\alpha)^\beta P_\alpha'(D_t)\tilde{\varphi}\big)(\zeta)$$
$$+ i\pi_1 \sum_{k=1}^{\varkappa_\alpha - \beta} (\zeta - \zeta_\alpha)^{k-1} \gamma_0 (D_t - \zeta_\alpha)^{\varkappa_\alpha - \beta - k} (D_t - \zeta_\alpha)^\beta P_\alpha'(D_t)\varphi(t),$$

woraus die Behauptung folgt.

4.2. *Beweis von Lemma 2.3.* In der Tat, man hat das Residuum

$$\operatorname{Res}_{z=\zeta_\alpha} \frac{1}{(z - \zeta_\alpha)^s (z - \bar{\zeta}_\alpha)^s} = \frac{(-1)^{s-1}\big(2(s-1)\big)!}{\big((s-1)!\big)^2} \frac{1}{(\zeta_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)^{2s-1}}.$$

Beweis von Lemma 2.4. Nach Lemma 2.2 erhält man mit $\beta = \varkappa_\alpha - k$

$$\frac{(\mathscr{F}_t f)(\zeta)}{(\zeta - \zeta_\alpha)^k} = \mathscr{F}_t\big((D_t - \zeta_\alpha)^{\varkappa_\alpha - k} P_\alpha'(D_t)\tilde{\varphi}\big)(\zeta) + i\pi_1 \sum_{s=1}^{k} (\zeta - \zeta_\alpha)^{s-k-1} W_{\alpha s}.$$

Da die erste Funktion auf der rechten Seite sich analytisch fortsetzen läßt, folgt hieraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathscr{F}_t f)(\zeta)}{(\zeta - \zeta_\alpha)^k}\, d\zeta = i\pi_1(-2\pi i W_{\alpha k}) = \pi_1^{-1} W_{\alpha k}.$$

4.3. *Beweis von Lemma 2.5.* Das folgende, leicht nachzuprüfende Lemma verallgemeinert eine bekannte Charakterisierung homogener Funktionen.

Lemma 4.1. *Eine in $\mathbf{R}_\eta^n \setminus \{0\}$ differenzierbare Funktion T (oder eine Distribution T in $\mathbf{R}_\eta^n$) ist genau dann q-homogen mit $\deg_q T = s$, wenn sie der verallgemeinerten Eulerschen Gleichung*

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \eta_k \frac{\partial T}{\partial \eta_k} = sT$$

genügt.

In diesem Falle, wenn T außerdem $(\beta+1)$-mal stetig differenzierbar in $\mathbf{R}_\eta^n \setminus \{0\}$ ist, ist $(\partial/\partial\eta_n)^\beta T$ q-homogen vom Grad $s-\beta q_n$.

Die in den durch (2.2) bzw. (2.3) erklärten Ausdrücken $r_{\alpha\beta}^+(\xi)$ bzw. $r_{\alpha\beta}^-(\xi)$ vorkommenden Polynome $P'_{+\alpha}(\xi,\zeta)$, $R'_+(\xi,\zeta)$ und $P_{-\alpha}(\xi,\zeta)$, $R_-(\xi,\zeta)$ sind q-homogen, und wenn man $\deg_q P_+$ mit μ_+ bezeichnet, so gilt

$$\deg_q P'_{+\alpha} = \mu_+ - mq_n - \varkappa_\alpha q_n,$$

$$\deg_q R'_+ = \mu_+ - mq_n,$$

$$\deg_q P_{-\alpha} = \mu - \mu_+ - \varkappa_\alpha q_n,$$

$$\deg_q R_- = \mu - \mu_+,$$

wobei $m = \operatorname{ord}_\zeta M(\xi,\zeta)$ ist. Es sei jetzt $\xi \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Aufgrund von (2.13) und Lemma 4.1 erhalten wir dann für $t>0$

$$r_{\alpha\beta}^+(t^{q'}\xi) = \frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial^\beta}{\partial\zeta^\beta}\frac{R'_+(t^{q'}\xi,\zeta)}{P'_{+\alpha}(t^{q'}\xi,\zeta)}\right)\Bigg|_{\zeta=\zeta_\alpha(t^{q'}\xi)} = t^{(\varkappa_\alpha-\beta)q_n} r_{\alpha\beta}^+(\xi)$$

und analog

$$r_{\alpha\beta}^-(t^{q'}\xi) = t^{(\varkappa_\alpha-\beta)q_n} r_{\alpha\beta}^-(\xi).$$

Die Behauptungen lassen sich hieraus wegen der Stetigkeit schließen.

4.4. *Beweis von Lemma 2.6.* In den Definitionen (2.17) bzw. (2.18) von $q_{j\alpha\beta}^+(\xi)$ bzw. $q_{j\alpha\beta}^-(\xi)$ sind auch die Polynome $Q'_{j+}(\xi,\zeta)$ und $Q_{j-}(\xi,\zeta)$ q-homogen, und zwar mit

$$\deg_q Q'_{j+} = \mu_j - \mu + \mu_+ - mq_n$$

und

$$\deg_q Q_{j-} = \mu_j - \mu_+.$$

Die Behauptungen können danach mit Hilfe von (2.13) und Lemma 4.1 gewonnen werden (vgl. 4.3).

Literatur

[1] GEL'MAN, I. V., und V. G. MAZ'JA: Estimates on the boundary for differential operators with constant coefficients in a half-space. - Math. USSR-Izv. 8, 1974, 667—726.

[2] HÖRMANDER, L.: On the theory of general partial differential operators. - Acta Math. 94, 1955, 161—248.

[3] HÖRMANDER, L.: Linear partial differential operators. - [Third revised printing.] Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1969.

[4] MATSUZAWA, T.: On quasi-elliptic boundary problems. - Trans. Amer. Math. Soc. 133, 1968, 241—265.

[5] MAZ'JA, V. G., und I. V. GEL'MAN: Estimates for differential operators with constant coefficients in a half-space. - Math. USSR-Sb. 25, 1975, 225—258.

[6] SCHECHTER, M.: Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions. - Comm. Pure Appl. Math. 12, 1959, 37—66.

[7] SCHECHTER, M.: On the dominance of partial differential operators II. - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. (3) 18, 1964, 255—282.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
Sammonkatu 6
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Eingegangen am 3. Februar 1978