Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Marhematica
Volumen 4, 1978/1979, 299—309

ANWENDUNGEN EINER METHODE VON PÓLYA IN DER THEORIE DER GANZEN FUNKTIONEN

LUTZ VOLKMANN

1. Bezeichnungen und einleitende Bemerkungen

1.1. Es seien f eine ganze Funktion, $M(r,f)=M(r)$ der Maximalbetrag, $m(r,f)=m(r)$ der Minimalbetrag, $\nu(r,f)=\nu(r)$ der Zentralindex, $n(r,0,f)=n(r,0)$ die Anzahl der Nullstellen von f im Kreis $|z|\leqq r$, $N(r,0,f)=N(r,0)$ die Nevanlinnasche Anzahlfunktion, $T(r,f)=T(r)$ die Nevanlinnasche Charakteristik und

$$\bar{N}(r,0,f)=\bar{N}(r,0)=\int_0^r \frac{N(t,0)-n(0,0)\log t}{t}\,dt+\frac{1}{2}\,n(0,0)\log^2 r.$$

Mit

$$\varrho=\varrho(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

wird die Ordnung von f bezeichnet.

1.2. Im Fall, daß f eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho<1$ ist, haben Valiron [14] und Wiman [19] unabhängig voneinander den bekannten, von Littlewood [8] vermuteten $\cos\pi\varrho$-Satz bewiesen

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log m(r)}{\log M(r)}\geqq\cos\pi\varrho. \tag{1.1}$$

Später gab Pólya [12] einen neuen und eleganten Beweis von (1.1), wobei das Theorem II in dieser Arbeit das zentrale Ergebnis darstellt. Diese Methode von Pólya benutzten Ostrovskiĭ [10] sowie auch Hellerstein und Shea [6], um einige wichtige Resultate in der Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen aufzustellen. Dabei hat Ostrovskiĭ [10] das oben erwähnte Theorem II von Pólya auf folgende Form gebracht:

Satz A. *Es seien h_1 und h_2 für $t\geqq 0$ reelle Funktionen mit $h_2(t)\geqq 0$. Weiter seien zwei Zahlen $\varrho\geqq 0$ und $\varepsilon>0$ so gegeben, daß die beiden Integrale*

$$\int_0^\infty \frac{|h_1(t)|}{t^{1+\sigma}}\,dt \quad \textit{und} \quad \int_0^\infty \frac{h_2(t)}{t^{1+\sigma}}\,dt$$

doi:10.5186/aasfm.1978-79.0429

für $\varrho<\sigma<\varrho+\varepsilon$ *konvergieren, aber das zweite Integral für* $\sigma<\varrho$ *divergiert. Außerdem existiere eine in* $\{z\colon |z-\varrho|<\varepsilon\}$ *analytische Funktion* s, *die für reelle* z *reell ist und die für* $\varrho<\sigma<\varrho+\varepsilon$ *die Identität*

$$\int_0^\infty \frac{h_1(t)}{t^{1+\sigma}}\,dt = s(\sigma)\int_0^\infty \frac{h_2(t)}{t^{1+\sigma}}\,dt$$

erfüllt.

Unter diesen Voraussetzungen gilt dann die Doppelungleichung

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{h_1(r)}{h_2(r)} \geqq s(\varrho) \geqq \liminf_{r\to\infty}\frac{h_1(r)}{h_2(r)}. \tag{1.2}$$

In der vorliegenden Note werden einige Anwendungen von Satz A gegeben. Dabei werden asymptotische Abschätzungen bewiesen, die mit Ergebnissen des Verfassers [16], [17] und [18] zusammenhängen, und es wird der oben genannte $\cos\pi\varrho$-Satz erweitert.

2. Ganze Funktionen mit negativen Nullstellen

2.1. Es gilt

Satz 2.1. *Ist* f *ein kanonisches Produkt mit negativen Nullstellen und von nichtganzzahliger Ordnung* ϱ, *so gilt für alle* θ *mit* $-\pi<\theta\leqq\pi$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\overline{N}(r,0)} \geqq \pi\varrho^2\frac{\cos\theta\varrho}{\sin\pi\varrho} \geqq \liminf_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\overline{N}(r,0)}. \tag{2.1}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $f(0)=1$ setzen. Ist $q=[\varrho]$ das Geschlecht von f, so gilt für $\varrho<\sigma<q+1$ (man vergleiche Hellerstein und Shea [6], S. 223)

$$\int_0^\infty \frac{\log|f(te^{i\theta})|}{t^{1+\sigma}}\,dt = \frac{\pi}{\sigma}\frac{\cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{|a_n|^\sigma}, \tag{2.2}$$

wobei a_n die Nullstellen von f sind. Beachtet man die Identitäten (man vergleiche Hayman [5], S. 25)

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{|a_n|^\sigma} = \sigma\int_0^\infty\frac{n(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt = \sigma^2\int_0^\infty\frac{N(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt = \sigma^3\int_0^\infty\frac{\overline{N}(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt, \tag{2.3}$$

so folgt aus (2.2)

$$\int_0^\infty \frac{\log|f(te^{i\theta})|}{t^{1+\sigma}}\,dt = \pi\sigma^2\frac{\cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma}\int_0^\infty\frac{\overline{N}(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt. \tag{2.4}$$

In (2.4) sind alle Voraussetzungen des Satzes A erfüllt, womit dann (2.1) aus (2.4) folgt.

Folgerung. Ist f eine ganze Funktion der Ordnung ϱ mit $0<\varrho<1$, so gilt

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,0)}{\log M(r)} \geqq \frac{\sin \pi\varrho}{\pi\varrho^2}. \tag{2.5}$$

Diese Folgerung ergibt sich sofort aus der rechten Ungleichung von (2.1), wenn man dort $\theta=0$ setzt und dabei beachtet, daß man im Fall $\varrho<1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Nullstellen von f als negativ voraussetzen darf.

Ungleichung (2.5) wurde in [18] mit Hilfe einer anderen Methode bewiesen.

2.2. Für ganze Funktionen endlicher Ordnung hat der Verfasser in [16]

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0)}{\nu(r)} \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,0)}{\log M(r)} \tag{2.6}$$

bewiesen. Wir wollen jetzt mit Hilfe von Satz 2.1 folgende Abschätzung der rechten Seite von (2.6) herleiten.

Satz 2.2. *Ist f eine ganze Funktion mit negativen Nullstellen und von endlicher Ordnung ϱ sowie vom Geschlecht q $(q\leqq\varrho\leqq q+1)$, so gilt*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{|\sin \pi\varrho|}{\pi\varrho^2}. \tag{2.7}$$

Beweis. Beim Beweis dieser Ungleichung wird $\varrho>0$ vorausgesetzt.

I. Zuerst wird gezeigt, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die ganze Funktion f als kanonisches Produkt voraussetzen darf. Dabei spielt das folgende Ergebnis, das auf Edrei und Fuchs [3] zurückgeht, eine wesentliche Rolle:

Für ein kanonisches Produkt Q mit negativen Nullstellen und vom Geschlecht q_1 gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^{q_1}}{\log M(r,Q)} = 0. \tag{2.8}$$

Einen einfachen Beweis von (2.8) findet man in [17].

Geht man von der Produktdarstellung von f aus (man vergleiche Nevanlinna [9], S. 233), so gilt

$$f(z) = e^{h(z)}Q(z), \tag{2.9}$$

wobei h ein Polynom vom Grad $p\leqq q$ und Q ein kanonisches Produkt mit negativen Nullstellen und von der Ordnung $\varrho_1\leqq\varrho$ sowie vom Geschlecht $q_1\leqq q$ ist.

A. Es sei $p<\varrho$. Dann gilt bekanntlich notwendig $\varrho_1=\varrho$ und damit auch $q_1=q$. Daher ergibt sich aus (2.9)

$$\log M(r,f) \leqq K_1 r^{q_1}+\log M(r,Q)$$

und

$$\log M(r,Q) \leqq K_2 r^{q_1}+\log M(r,f),$$

wobei K_1, K_2 Konstanten sind. Aus diesen beiden Ungleichungen folgt zusammen mit (2.8) sofort

$$\log M(r,f) \sim \log M(r,Q). \tag{2.10}$$

B. Es sei $p=\varrho$. Ist $\varrho_1<\varrho$, so ist auch $\bar{N}(r,0)$ von der Ordnung ϱ_1 und man erhält durch elementare Überlegungen

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,0)}{\log M(r)} = 0.$$

Ist $\varrho_1=\varrho$, so bleiben die beiden Möglichkeiten $q_1=\varrho$ oder $q_1=\varrho-1$. Im Fall $q_1=\varrho$ zeigt man wie in A, daß

$$\log M(r,f) \sim \log M(r,Q)$$

ist. Im Fall $q_1=\varrho-1$ gilt (man vergleiche Dinghas [2], S. 356)

$$\log M(r,Q) \leqq K r^{q_1+1} \int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q_1+1}} \frac{dt}{t+r}, \tag{2.11}$$

wobei K eine Konstante ist. Ist $\varepsilon>0$ gegeben, so wähle man ein x derart, daß

$$\int_x^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q_1+2}}\, dt < \varepsilon$$

gilt. Daraus folgt zusammen mit (2.11)

$$\log M(r,Q) \leqq K r^{q_1+1}\left\{\frac{1}{r}\int_0^x \frac{n(t,0)}{t^{q_1+1}}\, dt+\varepsilon\right\}$$

und ferner

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r,Q)}{r^{q_1+1}} = 0. \tag{2.12}$$

Außerdem gilt wegen bekannter Beziehungen (man vergleiche Hayman [5], S. 7, und Nevanlinna [9], S. 168, 172 und 220)

$$\begin{aligned} K_1 r^{q_1+1} = K_1 r^p \leqq T(r, e^h) &\leqq T(r,f)+T(r,Q)+K_2 \\ &\leqq \log M(r,f)+\log M(r,Q)+K_2, \end{aligned}$$

wobei K_1 und K_2 Konstanten sind. Aus dieser Ungleichung folgt mit (2.12) für alle $r\geqq r_0$

$$\log M(r,f) \geqq \log M(r,Q).$$

Aus A und B folgt das gewünschte Ergebnis, daß man beim Beweis von Satz 2.2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit f als kanonisches Produkt voraussetzen darf.

II. Ist ϱ nicht ganzzahlig, so folgt aus der für alle θ gültigen Ungleichung

$$\log M(r, f) \geqq \log |f(r e^{i\theta})|$$

und aus Satz 2.1 mit $\theta=0$ bzw. $\theta=\pi/\varrho$ sofort die gewünschte Abschätzung (2.7).

III. Ist dagegen $\varrho \geqq 1$ ganzzahlig, so greifen wir auf die sogenannte Methode der Pólya peaks zurück, die der Verfasser auch in [18] benutzt hat.

Es gilt (man vergleiche [18], S. 291)

$$\log M(r) \geqq \frac{1}{2} r^{q+1} \int_0^\infty \frac{\bar{N}(t, 0)}{t^{q+1}} \frac{q^2(t+r)^2+2qt(t+r)+t^2-tr}{(t+r)^3} dt. \tag{2.13}$$

Man nehme als Antithese an, daß

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r, 0)}{\log M(r)} = \alpha > 0$$

gilt.

Sei zunächst $\alpha < +\infty$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein r_0 derart, daß

$$\bar{N}(r, 0) \geqq (\alpha-\varepsilon) \log M(r) \tag{2.14}$$

für alle $r \geqq r_0$ gilt. Da der Integrand in (2.13) positiv ist, folgt mit (2.14) für $r \geqq r_0$

$$\log M(r) \geqq \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon) r^{q+1} \int_{r_0}^\infty \frac{\log M(t)}{t^{q+1}} \frac{q^2(t+r)^2+2qt(t+r)+t^2-tr}{(t+r)^3} dt.$$

Daraus ergibt sich mit einem Hilfssatz über Pólya peaks (man vergleiche [18]) für die Folgen (r_n), (a_n) und (A_n) mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{a_n} = \infty:$$

$$\log M(r_n)$$
$$\geqq \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)(1+o(1)) \log M(r_n) \int_{a_n}^{A_n} \left(\frac{t}{r_n}\right)^{\varrho-q-1} \frac{q^2(t+r_n)^2+2qt(t+r_n)+t^2-tr_n}{(t+r_n)^3} dt.$$

Ist nun ϱ ganzzahlig, also $\varrho=q$ oder $\varrho=q+1$, so strebt mit $n\to\infty$ das Integral gegen unendlich, und man erhält einen Widerspruch zu $\alpha>0$.

Für $\alpha=+\infty$ geht der Beweis analog.

Bemerkung. Mit der gleichen Methode beweist man für ganze Funktionen mit negativen Nullstellen und von ganzzahliger Ordnung (man vergleiche dazu [17])

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0)}{\log M(r)} = 0.$$

2.3. In [15] hat der Verfasser das asymptotische Verhalten von $n(r, 0)/T(r)$ untersucht und für ganze Funktion der Ordnung $\varrho<1$ gezeigt

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n(r,0)}{T(r)} \geqq \begin{cases} \varrho, & 0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2} \\ \varrho \sin \pi\varrho, & \frac{1}{2} \leqq \varrho < 1. \end{cases} \tag{2.15}$$

Hier wird nun eine Abschätzung in umgekehrter Richtung gegeben.

Satz 2.3. *Ist f eine ganze Funktion mit negativen Nullstellen und von der nicht ganzzahligen Ordnung ϱ sowie vom Geschlecht $q=[\varrho]$, so gilt*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r,0)}{T(r)} \leqq \begin{cases} \dfrac{\varrho\,|\sin \pi\varrho|}{q+|\sin \pi\varrho|}, & q<\varrho \leqq q+\frac{1}{2} \\ \dfrac{\varrho\,|\sin \pi\varrho|}{q+1}, & q+\frac{1}{2} \leqq \varrho < q+1, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,0)}{T(r)} \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho}\,\dfrac{|\sin \pi\varrho|}{q+|\sin \pi\varrho|}, & q<\varrho \leqq q+\frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\varrho}\,\dfrac{|\sin \pi\varrho|}{q+1}, & q+\frac{1}{2} \leqq \varrho < q+1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Beweis. Aus (2.8) und der bekannten Ungleichung (Nevanlinna [9], S. 220)

$$\log M(r) \leqq \frac{R+r}{R-r}\, T(R)$$

für $R>r$, folgt für kanonisches Produkt mit negativen Nullstellen vom Geschlecht q

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^q}{T(r)} = 0.$$

Damit zeigt man nun leicht, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit f als kanonisches Produkt voraussetzen darf.

Wegen (2.2) und (2.3) gilt für $\varrho<\sigma<q+1$

$$\int_0^\infty \frac{\log|f(te^{i\theta})|}{t^{1+\sigma}}\,dt = \pi \frac{\cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt \tag{2.18}$$

$$= \pi\sigma^2 \frac{\cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{\bar{N}(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt.$$

Setzt man

$$\tilde{m}_\varrho(r,f) = \int_{E_\varrho} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$

mit

$$E_\varrho = \left\{\theta \,\middle|\, -\pi<\theta<\pi \text{ und } \frac{\cos\theta\varrho}{\sin\pi\varrho} > 0\right\},$$

so folgt aus (2.18)

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{m}_\varrho(t,f)}{t^{1+\varrho}}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi\sigma}\int_{E_\varrho}\cos\theta\sigma\,d\theta\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt \tag{2.19}$$

$$= \frac{\pi\sigma^2}{\sin\pi\sigma}\int_{E_\varrho}\cos\theta\sigma\,d\theta\int_0^\infty \frac{\overline{N}(t,0)}{t^{1+\sigma}}\,dt.$$

Wendet man auf (2.19) Satz A an, so ergibt sich

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\tilde{m}_\varrho(r,f)}{n(r,0)} \geqq \frac{\pi}{\sin\pi\varrho}\int_{E_\varrho}\cos\theta\varrho\,d\theta \geqq \liminf_{r\to\infty}\frac{\tilde{m}_\varrho(r,f)}{n(r,0)} \tag{2.20}$$

und die entsprechende Ungleichung für $\overline{N}(r,0)$. Wegen

$$\tilde{m}_\varrho(r,f) \leqq 2\pi T(r)$$

folgt aus (2.20)

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r)}{n(r,0)} \geqq \frac{1}{2\sin\pi\varrho}\int_{E_\varrho}\cos\theta\varrho\,d\theta$$

und daraus durch elementare Rechnungen (2.16).

Entsprechend ergibt sich (2.17).

Bemerkung. Mit Hilfe einer Ungleichung von Shea, die man bei Hellerstein und Williamson [7], S. 335, findet, läßt sich (2.15) sofort auf meromorphe Funktionen übertragen. Für meromorphe Funktionen der Ordnung $\varrho<1$ hat die Abschätzung dann die Gestalt

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{n(r,0)+n(r,\infty)}{T(r)} \geqq \begin{cases}\varrho, & 0\leqq\varrho\leqq\frac{1}{2}\\[2ex] \varrho\sin\pi\varrho, & \frac{1}{2}\leqq\varrho<1.\end{cases}$$

3. Ganze Funktionen mit negativen Nullstellen der Ordnung $\varrho<1$

3.1. Bekanntlich genügt es, den $\cos\pi\varrho$-Satz für ganze Funktionen mit negativen Nullstellen zu beweisen (man vergleiche z. B. Boas [1], S. 40). Dann besitzt aber die ganze Funktion f die Darstellung

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n}\right) \quad (r_n>0). \tag{3.1}$$

Für diese Funktion gilt nun

$$M(r) = |f(r)| \quad \text{und} \quad m(r) = |f(-r)|,$$

und daher läßt sich der $\cos \pi\varrho$-Satz in der Form

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(-r)|}{\log|f(r)|} \geqq \cos \pi\varrho$$

schreiben. Diese Form des $\cos \pi\varrho$-Satzes gibt Anlaß dazu, die Frage des asymptotischen Verhaltens von

$$\frac{\log|f(r e^{i\theta})|}{\log|f(r e^{i\varphi})|}$$

zu behandeln.

Satz 3.1. *Ist f eine ganze Funktion mit negativen Nullstellen der Ordnung ϱ mit $0<\varrho<1$, so gilt für $-\pi<\theta\leqq\pi$ und $-\pi/2\leqq\varphi\leqq\pi/2$*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(r e^{i\theta})|}{\log|f(r e^{i\varphi})|} \geqq \frac{\cos\theta\varrho}{\cos\varphi\varrho} \geqq \liminf_{r\to\infty} \frac{\log|f(r e^{i\theta})|}{\log|f(r e^{i\varphi})|}. \tag{3.2}$$

Beweis. A. Es folgt aus (2.2) für $\varrho<\sigma<1$

$$\int_0^\infty \frac{\log|f(t e^{i\theta})|}{t^{1+\sigma}}\,dt = \frac{\cos\theta\sigma}{\cos\varphi\sigma} \int_0^\infty \frac{\log|f(t e^{i\varphi})|}{t^{1+\sigma}}\,dt. \tag{3.3}$$

Benutzt man Produktdarstellung (3.1) von f, so erkennt man, daß $\log|f(r e^{i\varphi})|\geqq 0$ für $-\pi/2\leqq\varphi\leqq\pi/2$ gilt. Zeigt man noch für $\mu<\varrho$ und $-\pi/2\leqq\varphi\leqq\pi/2$

$$\int_0^\infty \frac{\log|f(t e^{i\varphi})|}{t^{1+\mu}}\,dt = +\infty, \tag{3.4}$$

so folgt (3.2) aus (3.3) und Satz A.

B. Für $-\pi<\varphi<\pi$ gilt (man vergleiche Titchmarsh [13], S. 271)

$$\log f(r e^{i\varphi}) = r e^{i\varphi} \int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t(t+r e^{i\varphi})}\,dt.$$

Daraus ergibt sich für $-\pi/2\leqq\varphi\leqq\pi/2$

$$\begin{aligned} \log|f(r e^{i\varphi})| &= r\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t}\,\frac{t\cos\varphi+r}{t^2+r^2+2tr\cos\varphi}\,dt \\ &\geqq r\int_r^\infty \frac{n(t,0)}{t}\,\frac{r}{(t+r)^2}\,dt \\ &\geqq n(r,0)\int_1^\infty \frac{ds}{s(1+s)^2} = n(r,0)K, \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei $K>0$ eine Konstante ist. Da bekanntlich auch $n(r,0)$ von der Ordnung ϱ ist, folgt (3.4) aus (3.5), womit Satz 3.1 bewiesen ist.

Bemerkungen. Setzt man in (3.2) $\theta=\pi$ und $\varphi=0$, so erhält man gerade den klassischen $\cos\pi\varrho$-Satz.

Für $\theta=\pi$ ist die rechte Seite der Ungleichung (3.2) sicher nicht scharf. Ist aber $-\pi<\alpha<\pi$ und $n(r,0)\sim r^{\varrho}$, so gilt (man vergleiche Boas [1], S. 55)

$$\log f(r e^{i\alpha}) \sim e^{i\varrho\alpha}\frac{\pi r^{\varrho}}{\sin\pi\varrho},$$

also

$$\log|f(r e^{i\alpha})| \sim \pi r^{\varrho}\frac{\cos\alpha\varrho}{\sin\pi\varrho}$$

und daher

$$\frac{\log|f(r e^{i\theta})|}{\log|f(r e^{i\varphi})|} \sim \frac{\cos\theta\varrho}{\cos\varphi\varrho}$$

für $-\pi<\theta,\ \varphi<\pi$. Damit ist (3.2) für $\theta\neq\pi$ nicht zu verbessern.

3.2. Im folgenden setze man für $0<\beta\leqq\pi$

$$m(r,f,\beta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta}\log|f(r e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Satz 3.2. *Ist f eine ganze Funktion mit negativen Nullstellen der Ordnung ϱ mit $0<\varrho<1$, so gilt für $-\pi/2\leqq\varphi\leqq\pi/2$*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{m(r,f,\beta)}{\log|f(r e^{i\varphi})|}\geqq\frac{1}{\pi\varrho}\frac{\sin\varrho\beta}{\cos\varrho\varphi}\geqq\liminf_{r\to\infty}\frac{m(r,f,\beta)}{\log|f(r e^{i\varphi})|}. \tag{3.6}$$

Beweis. Für $\varrho<\sigma<1$ folgt aus (2.2)

$$\int_0^{\infty}\frac{m(t,f,\beta)}{t^{1+\sigma}}\,dt=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\sin\beta\sigma}{\sin\pi\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\sigma}}$$

und daraus zusammen mit (2.2)

$$\int_0^{\infty}\frac{m(t,f,\beta)}{t^{1+\sigma}}\,dt=\frac{1}{\pi\sigma}\frac{\sin\beta\sigma}{\cos\varphi\sigma}\int_0^{\infty}\frac{\log|f(t e^{i\varphi})|}{t^{1+\sigma}}\,dt. \tag{3.7}$$

Beachtet man den Beweis von Satz 3.1 so erkennt man, daß alle Voraussetzungen von Satz A erfüllt sind, und daher ergibt sich aus der Identität (3.7) die Aussage des Satzes 3.2.

Aus Satz 3.2 folgt leicht die Vermutung von Paley [11] für ganze Funktionen mit negativen Nullstellen der Ordnung $0<\varrho<1$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r)}{\log M(r)}\geqq\begin{cases}\dfrac{\sin\pi\varrho}{\pi\varrho}, & 0<\varrho\leqq\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{\pi\varrho}, & \dfrac{1}{2}\leqq\varrho<1.\end{cases} \tag{3.8}$$

Denn da die Nullstellen von f negativ sind, ist $|f(re^{i\theta})|$ eine gerade Funktion von θ und daher gilt für alle β mit $0<\beta\leqq\pi$

$$T(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\geqq m(r,f,\beta).$$

Daraus und aus (3.6) mit $\varphi=0$ und $\beta=\pi$ für $\varrho\leqq 1/2$ sowie mit $\beta=\pi/(2\varrho)$ für $\varrho\geqq 1/2$ folgt Ungleichung (3.8).

Die Vermutung von Paley ist für alle ganzen Funktionen richtig. Den ersten vollständigen Beweis dafür gab Govorov [4].

Literatur

[1] Boas, R. P., Jr.: Entire functions. - Pure and Applied Mathematics 5. Academic Press Inc., New York, 1954.

[2] Dinghas, A.: Vorlesungen über Funktionentheorie. - Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 110. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961.

[3] Edrei, A., und W. H. J. Fuchs: On the growth of meromorphic functions with several deficient values. - Trans. Amer. Math. Soc. 93, 1959, 292—328.

[4] Govorov, N. V.: Paley's hypothesis. - Functional Anal. Appl. 3, 1969, 115—118. [Translation from: Funkcional. Anal. i Priložen. 3:2, 1969, 41—45.]

[5] Hayman, W. K.: Meromorphic functions. - Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford, 1964.

[6] Hellerstein, S., und D. F. Shea: Bounds for the deficiencies of meromorphic functions of finite order. - Entire functions and related parts of analysis. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 11. American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 1968, 214—239.

[7] Hellerstein, S., und J. Williamson: Entire functions with negative zeros and a problem of R. Nevanlinna. - J. Analyse Math. 22, 1969, 233—267.

[8] Littlewood, J. E.: A general theorem on integral functions of finite order. - Proc. London Math. Soc. (2) 6, 1908, 189—204.

[9] Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen. - [Zweite verbesserte Auflage.] Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 46. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

[10] Ostrovskiĭ, I. V. [И. В. Островский]: О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями. - Zap. Meh.-Mat. Fak. i Har'kov. Mat. Obšč. (4) 28, 1961, 23—32.

[11] Paley, R. E. A. C.: A note on integral functions. - Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 1932, 262—265.

[12] Pólya, G.: On the minimum modulus of integral functions. - J. London Math. Soc. 1, 1926, 78—86.

[13] Titchmarsh, E. C.: The theory of functions. - [Second edition.] Oxford University Press, London, 1939.

[14] Valiron, G.: Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière. - Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) 5, 1913 [1914], 117—257.

[15] VOLKMANN, L.: Über einen Zusammenhang zwischen der charakteristischen Funktion und der Anzahl der Nullstellen bei ganzen Funktionen der Ordnung $\lambda < 1$. - An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. 20, 1974, 305—308.

[16] VOLKMANN, L.: Über Zusammenhänge zwischen den Nullstellen und dem Zentralindex ganzer Funktionen. - Math. Ann. 217, 1975, 87—91.

[17] VOLKMANN, L.: Ganze Funktionen mit negativen Nullstellen. - Math. Scand. 40, 1977, 143—150.

[18] VOLKMANN, L.: Zusammenhänge zwischen dem Maximalbetrag und einer Nullstellenfunktion bei ganzen Funktionen. - Arch. Math. (Basel) 30, 1978, 286—292.

[19] WIMAN, A.: Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null. - Math. Ann. 76, 1915, 197—211.

Freie Universität Berlin
I. Mathematisches Institut
Hüttenweg 9
D 1000 Berlin 33

Eingegangen am 27. Februar 1979