Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 6, 1981, 125—130

ZU DEN GRUNSKYSCHEN COEFFIZIENTEN-BEDINGUNGEN*)

REINER KÜHNAU

1. Einleitung und Resultate

Es sei $\sum_0$ die Klasse der Funktionen

$$w(z) = z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots, \tag{1}$$

die für $|z|\geqq 1$ bis auf den einfachen Pol in $z=\infty$ regulär und schlicht sind. Wie üblich bilden wir

$$-\log\frac{w(z)-w(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} z^{-k}\zeta^{-l}, \tag{2}$$

$$U(z,\zeta) = \frac{w'(z)w'(\zeta)}{[w(z)-w(\zeta)]^2}-\frac{1}{(z-\zeta)^2}. \tag{3}$$

Bekanntlich gelten dann u. a. die Ungleichungen

$$\left|\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_k x_l\right| \leqq \varkappa \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2/k, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\left|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\right|^2 \leqq \varkappa^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2/k, \tag{5}$$

$$\left|\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_k\gamma_l \log\frac{w(z_k)-w(z_l)}{z_k-z_l}\right| \leqq -\varkappa \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_k\bar{\gamma}_l \log\left(1-\frac{1}{z_k\bar{z}_l}\right), \tag{6}$$

$$\left|\sum_{k,l=1}^{n} \Gamma_k\Gamma_l U(z_k,z_l)\right| \leqq \varkappa \sum_{k,l=1}^{n} \Gamma_k\bar{\Gamma}_l (z_k\bar{z}_l-1)^{-2} \tag{7}$$

für jedes System von untereinander verschiedenen Punkten z_k mit $|z_k|>1$ und komplexen Zahlen x_k bzw. γ_k bzw. Γ_k mit einem $\varkappa\leqq 1$ nach H. Grunsky, G. M. Golusin (vgl. [12]) sowie S. Bergman und M. Schiffer [4] (vgl. auch [5]). Wir wollen im

*) Vortrag vor der Finnischen Mathematischen Gesellschaft am 14. 10. 1980.

doi:10.5186/aasfm.1981.0608

folgenden die Frage nach dem kleinstmöglichen $\varkappa$ beleuchten. Eine zentrale Rolle wird dabei der kleinste nichttriviale Fredholmsche Eigenwert $\lambda > 1$ des Bildes $\mathfrak{C}$ von $|z| = 1$ spielen [13]. Man beachte im folgenden, daß die Ausartung $\lambda = \infty$ nur im trivialen Falle, $\mathfrak{C}$ ist ein Kreis, d. h. $w(z) \equiv z$, auftritt (vgl. z. B. [8]).

Satz 1*. *Die Ungleichungen* (4) *bis* (7) *gelten sogar mit* $\varkappa = 1/\lambda$, *jedoch zu festem* $w(z)$ *keine für alle Parametersysteme mit einem kleineren Faktor* $\varkappa$.

Dies liefert für die Abbildungen (1) aus $\sum_0$ z. B. $|a_1| \leqq 1/\lambda$ und für den Inhalt I des Komplementes des Bildgebietes $I \geqq \pi(1-\lambda^{-2})$ [4]. Diese Abschätzungen sind scharf, wie die Abbildung auf's Äußere einer Ellipse zeigt. Eine verwandte Ungleichung, die auch noch den Inhalt I neben a_1 betrachtet und im wesentlichen auf M. Schiffer zurückgeht, wurde in [9] unter (20) angegeben.

Bezeichnet man zu festem $w(z) \in \sum_0$ und festem n

$$1/\lambda^{(n)} = \max \left| \sum_1^n a_{kl} x_k x_l \right| \quad \text{bei} \quad \sum_1^n |x_k|^2/k \leqq 1,$$

dann erhalten wir unmittelbar

Folgerung 1. *Die Folge der* $1/\lambda^{(n)}$ *ist nicht fallend und gegen* $1/\lambda$ *konvergent.*

Da nach [12] (S. 88—89) $1/\lambda^{(n)}$ als gewöhnlicher Eigenwert bei der entsprechenden Teilmatrix der a_{kl} deutbar ist, erhält man so eine Möglichkeit der praktischen Berechnung bzw. Abschätzung von λ über die $\lambda^{(n)}$, d. h. letztlich über die a_k in (1).

In [5] (vgl. auch [11], [12], [14] und weitere Literatur hierzu in [10]) wurde weiter gezeigt, daß (4) bis (7) mit $\varkappa = q \equiv (Q-1)/(Q+1)$ notwendig dafür sind, daß $w(z)$ zusätzlich eine schlichte Q-quasikonforme Fortsetzung nach $|z| < 1$ besitzt. Dabei wurde die Frage gestellt ([5], S. 97, [6], [11], S. 31, [12], S. 292, [14], S. 168), ob diese Bedingungen mit $\varkappa = q$ auch hinreichend for Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit sind. Immerhin wurde in [12] gezeigt, daß aus der Gültigkeit von (4) mit einem $\varkappa < 1$ die Q'-quasikonforme Fortsetzbarkeit mit einem gewissen Q' folgt und in [6], daß im Falle $\varkappa < 1/3$ wenigstens die $(1+3\varkappa)/(1-3\varkappa)$-quasikonforme Fortsetzbarkeit folgt; vgl. auch [3]. Wir werden in § 3 über Satz 1 an einem Beispiel aufzeigen, daß keine der Bedingungen (4) bis (7) mit $\varkappa = q$ für Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit hinreichend ist. (Entsprechendes gilt für andere aus (4) folgende Ungleichungen, z. B. (6) in [7]; vgl. auch [2], 6.57, 6.58, 7.23; in [17] qualitative Resultate analog zu [6].)

Satz 2. *Es gibt Abbildungen in* $\sum_0$, *die die Bedingungen* (4) *bis* (7) *mit* $\varkappa = q$ *erfüllen, aber nicht* Q*-quasikonform fortsetzbar sind.*

*) Auf diesen Satz hat mich brieflich unterm 21.3.72 Herr Chr. Pommerenke mit Hinweis auf [13] — auch mit Bezug auf ein von ihm mit G. Springer geführtes Gespräch — aufmerksam gemacht im Falle von (4).

Aus (4) mit $\varkappa = q$ und Satz 1 ergibt sich übrigens beiläufig die

Folgerung 2 ([1], [15]). *Es gilt* $1/\lambda \leqq q$, *falls* $w(z)$ *nach* $|z|<1$ *noch Q-quasikonform fortsetzbar ist.*

Diese Ungleichung ist scharf. Das Gleichheitszeichen steht z. B. für den Fall, $w(z)$ bildet auf's Äußere einer Ellipse ab.

Aus Satz 1 und dieser Ungleichung ergeben sich natürlich umgekehrt auch wieder die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen für die Q-quasikonform fortsetzbaren Abbildungen.

2. Beweis von Satz 1

Da bekanntlich [5] aus der Gültigkeit von (4) die Ungleichungen (5), (6), (7) mit gleichem $\varkappa$ folgen, genügt es, (4) mit $\varkappa = 1/\lambda$ zu beweisen. Letzteres ergibt sich in Anlehnung an die Überlegungen in [12] (S. 290—291) so.

Sei mit den Faberschen Polynomen $\varphi_k(w)$

$$h(w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} \varphi_k(w).$$

Dann gilt für $|z| \geqq 1$

$$h(w(z)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k}, \quad d_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l.$$

Die Funktion $\Re h(w)$ ist innerhalb $\mathfrak{C}$ harmonisch und besitzt dort das (nach Umformung in ein Randintegral wie üblich zu berechnende) Dirichletsche Integral

$$\iint |h'(w)|^2 d_w \Omega = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{k} - \pi \sum_{k=1}^{\infty} k\,|d_k|^2. \tag{8}$$

Hier bezeichne $d\Omega$ das Flächenelement in der jeweiligen Ebene.

Die gleichen Randwerte auf $\mathfrak{C}$ besitzt die außerhalb $\mathfrak{C}$ harmonische und in $w=\infty$ verschwindende Funktion $\Re \psi(z(w))$ mit der für $|z| \geqq 1$ regulären Funktion

$$\psi(z) = h(w(z)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} z^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{x}_k}{k} z^{-k} = \sum_{k=1}^{n} \left(d_k + \frac{\bar{x}_k}{k}\right) z^{-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k z^{-k}.$$

Das hierzu gehörige Dirichletsche Integral läßt sich nach Transformation in die z-Ebene zu

$$\iint_{|z|\geqq 1} |\psi'(z)|^2 d_z \Omega = \pi \sum_{k=1}^{n} k \left| d_k + \frac{\bar{x}_k}{k} \right|^2 + \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|d_k|^2 \tag{9}$$

umrechnen. Schätzt man nun den Quotienten von (8) und (9) durch die bekannte Extremalcharakterisierung des kleinsten Fredholmschen Eigenwertes λ ab (vgl. z. B. [1], [13], [15]), folgt (4) mit $\varkappa = 1/\lambda$. (Verwendet man diese Extremalcharakterisierung von λ zur Definition, ist der Beweis in dieser Form nicht an einschränkende Glattheitsvoraussetzungen bezüglich $\mathfrak{C}$ gebunden.)

Um nun noch zu beweisen, daß in (4) bis (7) der Faktor $\varkappa = 1/\lambda$ nicht durchweg durch einen kleineren ersetzt werden kann, genügt es, dies für die letzte Ungleichung zu zeigen, da aus der Gültigkeit einer der übrigen über (6) elementar (7) folgt ([5]).

Nehmen wir nun also an, (7) sei für alle Werte- bzw. Punktsysteme bei $w(z) \in \sum_0$ richtig! Dann gilt auch folgendes kontinuierliches Analogon mit jeweils zweimaliger Integration über das Äußere des Einheitskreises:

$$\left|\iint\iint \Gamma(z)\Gamma(\zeta)U(z,\zeta)\,d_z\Omega\,d_\zeta\Omega\right| \leqq \varkappa \iint\iint \Gamma(z)\overline{\Gamma(\zeta)}(z\bar{\zeta}-1)^{-2}\,d_z\Omega\,d_\zeta\Omega. \tag{10}$$

Hier setzen wir $\Gamma(z) = \overline{F'(w)w'(z)}$ wobei $F(w)$ eine „komplexe Eigenfunktion" zum Eigenwert λ ist ([13], [8]). Dies ist eine außerhalb $\mathfrak{C}$ reguläre Funktion $\not\equiv 0$, die in $w=\infty$ verschwindet, und für die $F-\lambda\bar{F}$ ins Innere von $\mathfrak{C}$ analytisch fortsetzbar ist. Auf $\mathfrak{C}$ ist F noch stetig und damit regulär. Es ist für w außerhalb $\mathfrak{C}$, wenn auf $\mathfrak{C}$ im negativen Sinne integriert wird,

$$F'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{F'(\omega)\,d\omega}{\omega-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{dF(\omega)}{\omega-w} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{d(F-\lambda\bar{F})}{\omega-w}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{\overline{F'(\omega)}\,\overline{d\omega}}{\omega-w} = \frac{\lambda}{\pi}\iint \frac{\overline{F'(\omega)}}{(\omega-w)^2}\,d_\omega\Omega.$$

So wird die linke Seite von (10) bis auf die Betragsstriche zu

$$\iint\left\{\iint\left[\frac{\overline{F'(w)}\,\overline{F'(\omega)}}{(w-\omega)^2}|w'(z)|^2|w'(\zeta)|^2 - \frac{\overline{F'(w)w'(z)}\cdot\overline{F'(\omega)w'(\zeta)}}{(z-\zeta)^2}\right]d_\zeta\Omega\right\}d_z\Omega$$

$$= \iint\left\{\overline{F'(w)}\,|w'(z)|^2\iint\frac{\overline{F'(\omega)}}{(w-\omega)^2}\,d_\omega\Omega - \overline{F'(w)w'(z)}\iint\frac{\overline{dF(w(\zeta))/d\zeta}}{(z-\zeta)^2}\,d_\zeta\Omega\right\}d_z\Omega$$

$$= \iint \overline{F'(w)}\,|w'(z)|^2(\pi/\lambda)\,F'(w)\,d_z\Omega = (\pi/\lambda)\iint |F'|^2\,d_w\Omega,$$

denn

$$\iint\frac{\overline{dF(w(\zeta))/d\zeta}}{(z-\zeta)^2}\,d_\zeta\Omega = \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\overline{F(\zeta)}}{\zeta-z} = -\frac{1}{2i}\,\frac{1}{z}\,\overline{\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta\,dF}{\zeta-1/\bar{z}}} \equiv 0.$$

Dabei schreiben wir $w=w(z)$, $\omega=w(\zeta)$.

Entsprechend wird die rechte Seite von (10) zu

$$\varkappa\iint\left\{\iint F'(\omega)\,w'(\zeta)\,\bar{\zeta}^{-2}\,\overline{F'(w)}\,\overline{w'(z)}(z-1/\bar{\zeta})^{-2}\,d_z\Omega\right\}d_\zeta\Omega$$

$$= \varkappa\iint F'(\omega)\,w'(\zeta)\,\bar{\zeta}^{-2}\left(\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{d\overline{F(z)}}{z-1/\bar{\zeta}}\right)d_\zeta\Omega$$

$$= \pi\varkappa\iint |F'(\omega)|^2\,d_\omega\Omega.$$

So entsteht aus (10) $1/\lambda \leqq \varkappa$. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

3. Beweis von Satz 2

Wir bilden die folgende Abbildungskette

$$(11)\quad \mathfrak{z}(z)=z^{3/2},\ \mathfrak{w}(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}+r^2/\mathfrak{z}\ \text{ für }\ |\mathfrak{z}|\geqq 1,\ \mathfrak{w}(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}+r^2\bar{\mathfrak{z}}\ \text{ für }\ |\mathfrak{z}|\leqq 1,$$
$$w(\mathfrak{w})=\mathfrak{w}^{2/3}.$$

Dabei sei $0<r<1$, und die Zweigwahl sei so vorgenommen, daß jeweils die positiv reelle Achse in sich übergeht, wir also eine Abbildung $\in\sum_0$ erhalten. Die für $|z|\leqq 1$ entstehende Abbildung ist offenbar bei der entstehenden Randabbildung möglichst konform, d. h. die für $|z|>1$ vorliegende Abbildung $w(z)$ ist mit $q^*=r^2=(Q^*-1)/(Q^*+1)$ nach $|z|\leqq 1$ gerade Q^*-quasikonform fortsetzbar, aber nicht Q-quasikonform fortsetzbar mit kleinerem Q. Das ergibt sich unmittelbar aus der Struktur der Abbildung als „Teichmüllersche Abbildung" durch die Grötzschsche Methodik bzw. heutzutage natürlich auch sofort aus den Strebelschen Resultaten (z. B. in [16], S. 77).

Die aus $|z|=1$ entstehende Bildkurve $\mathfrak{C}$ besitzt „Dreifachsymmetrie", d. h. geht bei Drehung um $2\pi/3$ um den Nullpunkt in sich über. Für den Fredholmschen Eigenwert λ gilt nach der in § 1 genannten Ahlforsschen Ungleichung $1/\lambda\leqq q^*$. Wenn gezeigt ist, daß hier nicht das Gleichheitszeichen steht, dann hätten wir eine einparametrige Schar von Beispielen für Satz 2. Wenn hier das Gleichheitszeichen stünde, müßte in [15] — wenn man z. B. dort den Beweis verfolgt — im Dirichletschen Prinzip (11) ebenfalls das Gleichheitszeichen stehen. Dann wäre $h_1^*(w(z))$ für $|z|<1$ harmonisch, wenn wir mit $h_1^*(w)$ die harmonisch konjugierte Funktion zum Potential der Doppelschicht mit einer Dichte auf $\mathfrak{C}$, die gleich einer Eigenfunktion zu λ ist, bezeichnen. Da die Übergänge von z nach $\mathfrak{z}$ und von w nach $\mathfrak{w}$ konform sind, wären auch $h_1^*(w(\mathfrak{w}))$ und $h_1^*(w(\mathfrak{w}(\mathfrak{z})))$ (mit gemäß (11) definiertem $w(\mathfrak{w})$ und $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$) außer in 0 lokal harmonisch. Da der Übergang von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{w}$ eine Affinität darstellt, folgt daraus notwendig

$$\mathrm{h}_1^*(w(\mathfrak{w}))=\mathfrak{Im}\,(a\mathfrak{w}+b\mathfrak{w}^2)+\text{const},\ a \text{ komplexe, } b \text{ reelle Konstante,}$$

was man anhand der Laplaceschen Differentialgleichung nachrechnet. Damit wird

$$h_1^*(w)=\mathfrak{Im}\,(aw^{3/2}+bw^3).$$

Da diese Funktion in Umgebung von $w=0$ eindeutig ist, folgt $a=0$. Unsere Funktion $h_1^*(w)=b\,\mathfrak{Im}\,w^3$ besitzt also auch die Dreifachsymmetrie, damit auch die zugehörige Eigenfunktion von $\mathfrak{C}$, die sich in bekannter Weise aus $h_1^*(w)$ durch die Sprungrelation beim Potential der Doppelschicht bestimmt. Diese Dreifachsymmetrie kommt also auch der zugehörigen komplexen Eigenfunktion von $\mathfrak{C}$ zu, welche damit vermöge $\zeta=w^3$ Anlaß gibt zu einer komplexen Eigenfunktion vom Bild von $\mathfrak{C}$

in der ζ-Ebene. Dieses ist eine Ellipse mit den Brennpunkten 0 und $4r^2$ und Scheiteln in $-(1-r^2)^2$ und $(1+r^2)^2$. Hier sind bekanntlich die Eigenwerte von der Form r^{-4k}, $k=1, 2, \ldots$. Damit folgt $\lambda \geqq r^{-4} = q^{*-2} > q^{*-1}$ im Widerspruch zur Annahme. Somit ist Satz 2 bewiesen.

Literatur

[1] AHLFORS, L. V.: Remarks on the Neumann—Poincaré integral equation. - Pacific J. Math. 2, 1952, 271—280.

[2] ANDERSON, J. M., K. F. BARTH und D. A. BRANNAN: Research problems in complex analysis. - Bull. London Math. Soc. 9, 1977, 129—162.

[3] BECKER, J., und CHR. POMMERENKE: Über die quasikonforme Fortsetzung schlichter Funktionen. - Math. Z. 161, 1978, 69—80.

[4] BERGMAN, S., und M. SCHIFFER: Kernel functions and conformal mapping. - Compositio Math. 8, 1951, 205—249.

[5] KÜHNAU, R.: Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen. - Math. Nachr. 48, 1971, 77—105.

[6] KÜHNAU, R.: Koeffizientenbedingungen bei quasikonformen Abbildungen. - Ann. Univ. Mariae Curie—Skłodowska Sect. A 22—24, 1968—1970, 105—111.

[7] KÜHNAU, R.: Zur Abschätzung der Schwarzschen Ableitung bei schlichten Funktionen. - Math. Nachr. 59, 1974, 195—198.

[8] KÜHNAU, R.: Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen. - Math. Nachr. 76, 1977, 139—152.

[9] KÜHNAU, R.: Funktionalabschätzungen bei quasikonformen Abbildungen mit Fredholmschen Eigenwerten. - Comment. Math. Helv. (im Druck).

[10] KÜHNAU, R., und H. BAUMGARTEN: Die Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen mit längs zweier Kreise springender Dilatationsschranke. - Math. Nachr. 92, 1979, 117—127.

[11] LEHTO, O.: Quasiconformal mappings in the plane. Teil I der "Lectures on quasiconformal mappings by F. W. Gehring and O. Lehto." - Lecture Note 14, University of Maryland, 1975.

[12] POMMERENKE, CHR.: Univalent functions. - Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[13] SCHIFFER, M.: Fredholm eigenvalues and conformal mapping. - Rend. Mat. 22, 1963, 447—468.

[14] SCHOBER, G.: Univalent functions — Selected topics. - Lecture Notes in Mathematics 478, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1975.

[15] SPRINGER, G.: Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping. - Acta Math. 111, 1964, 121—142.

[16] STREBEL, K.: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II. - Comment. Math. Helv. 39, 1964, 77—89.

[17] ŽURAVLEV, I. V.: Some sufficient conditions of quasiconformal continuability of analytic functions. - Dokl. Akad. Nauk SSSR 243, 1978, 1377—1380 (Russian).

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Sektion Mathematik
DDR-401 Halle an der Saale
Deutsche Demokratische Republik

Eingegangen am 19. Oktober 1980