Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 10, 1985, 355—363

Commentationes in honorem
Olli Lehto
LX annos nato

UN PROBLÈME ASYMPTOTIQUE EN CONTRÔLE PONCTUEL

JACQUES-LOUIS LIONS

Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$, de frontière Γ régulière. Dans Ω, on considère un système gouverné par une équation hyperbolique avec contrôle s'exercant en b donné, $b\in\Omega$. Plus précisément on suppose que *l'état du système* est donné par la solution de

(1) $$\varepsilon \frac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}-\Delta y_\varepsilon = v(t)\delta(x-b)$$

$$\text{dans} \quad Q = \Omega\times]0, T[,$$

où ε est donné >0 et est destiné à tendre vers zéro; $\delta(x-b)$ désigne la messe de Dirac au point b; le contrôle est $v=v(t)\in L^2\ (0, T)$. On ajoute à (1) les conditions aux limites et initiales

(2) $$y_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma\times]0, T[,$$

(3) $$y_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Les équations (1), (2) et (3) définissent de manière unique l'état

(4) $$y_\varepsilon = y_\varepsilon(x, t, v) = y_\varepsilon(v)$$

dont on sait (cf. J. L. Lions [6] [1)]) que

(5) $$y_\varepsilon(v) \quad \text{est } \textit{continue de} \quad [0, T] \to L^2(\Omega).$$

On définit alors la *fonction coût*

(6) $$J_\varepsilon(v) = \int_\Omega [y_\varepsilon(x, T, v)-z_d(x)]^2\, dx+N\int_0^T v(t)^2\, dt,$$

où

(7) $$z_d \text{ est donné dans } L^2(\Omega), \ N \text{ est donné positif.}$$

[1] La première démonstration de ce fait, par des méthodes puissantes d'Analyse Harmonique, est dûe à Y. Meyer [8] et a été suivie de démonstrations «directes» par L. Nirenberg [9] et l'A. [6].

doi:10.5186/aasfm.1985.1039

On introduit

(8) $$\mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(0, T)$$

(l'ensemble des contrôles admissibles) et l'on considère le *problème de contrôle optimal*

(9) $$\inf J_\varepsilon(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Ce problème admet une solution unique u_ε. Nous nous intéressons ici au comportement de u_ε lorsque $\varepsilon \to 0$.

La situation formelle est « claire ». Le problème limite est un *système parabolique* dont l'état

(10) $$y = y(x, t, v) = y(v)$$

est donné par

(11) $$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v(t)\delta(x-b)$$

avec

(12) $$y = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

(13) $$y(x, 0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

La fonction coût est alors donnée par

(14) $$J(v) = \int_\Omega [y(x, T, v) - z_d(x)]^2\, dx + N\int_0^T v^2\, dt$$

et on pourrait penser que le « *problème limite* » est

(15) $$\inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais il y a une difficulté et le « résultat » précédent n'est pas tout à fait correct. En effet il existe des $v_0 \in L^2(0, T)$ tels que $y(T, v_0) \notin L^2(\Omega)$.

Si donc on prend pour $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble $\{v_0\}$, v_0 comme ci-dessus, le problème limite (15) n'a pas de sens. En fait on doit introduire l'espace

(16) $$\mathcal{U}^{(n)}(0, T) = \{v \mid v \in L^2(0, T),\ y(T, v) \in L^2(\Omega)\};$$

cet espace, muni de la norme de graphe

(17) $$\left(\int_0^T v^2\, dt + \int_\Omega y(x, T, v)^2\, dx\right)^{1/2}$$

est un *espace de Hilbert* étudié dans J. L. Lions [4]—[5], Li Ta-tsien [1]—[2], Shi Shu-Chung [10], J. Simon [11]. Cet espace (à une équivalence de norme près) est indépendant de b, de Ω, et même (Li Ta-tsien, loc. cit.) de l'opérateur Δ que peut être remplacé par un opérateur elliptique du 2ème ordre à coefficients réguliers sans que l'espace $\mathcal{U}^{(n)}$ change. *Formellement* (il y a des difficultés techniques, étudiées dans J. Simon [11]) l'espace $\mathcal{U}^{(n)}(0, T)$ coïncide avec l'espace des $v \in L^2(0, T)$ telles que

(18) $$\int_0^T \int_0^T (2T-(t+s))^{-n/2} v(t)\, v(s)\, dt\, ds < \infty.$$

Le passage à la limite indiqué formellement ci-dessus *devient alors correct si l'on suppose que*

(19) $$\mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{U}^{(n)}(0, T) \neq \emptyset,$$

le problème limite étant

(20) $$\inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{U}^{(n)}(0, T).$$

Nous donnons au № 2 ci après des indications, assez rapides, sur la démonstration de ce résultat après avoir donné au № 1 un résultat de perturbation singulière pour un système hyperbolique-parabolique.

1. Perturbation singulière pour un système hyperbolique-parabolique

Avec les notations de l'Introduction, on considère l'équation

(1.1) $$\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times]0,T[,$$

(1.2) $$\Phi = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[,$$

(1.3) $$\left| \begin{array}{l} \Phi(x, 0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \end{array} \right.$$

avec g donnée dans $L^2(\Omega)$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, (1.1), (1.2) et (1.3) admet une solution unique Φ_ε, telle que

(1.4) $$\Phi_\varepsilon \quad \text{est continue de} \quad [0, T] \to H_0^1(\Omega),^{1)}$$

(1.5) $$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t} \quad \text{est continue de} \quad [0, T] \to L^2(\Omega).$$

On va montrer que, *lorsque* $\varepsilon \to 0$,

(1.6) $$\Phi_\varepsilon \to \Phi \quad \textit{dans} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{faible},$$

où Φ *est la solution de*

(1.7) $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans} \quad Q,$$

(1.8) $$\Phi = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

(1.9) $$\Phi(x, 0) = g(x) \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Remarque 1.1. Il y a donc un phénomène un peu inhabituel pour $t=0$, les conditions (1.3) devenant (1.9).

[1] On utilise les notations habituelles des espaces de Sobolev, comme par exemple dans J. L. Lions et E. Magenes [7].

La situation est entièrement différente si, au lieu de (1.3), on considère,

$$\Phi_\varepsilon(x, 0) = g^0(x), \quad \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = g^1(x). \tag{1.10}$$

Cette fois la convergence de Φ_ε a lieu au sens (1.6), vers Φ solution de (1.7), (1.8) et, au lieu de (1.9) :

$$\Phi(x, 0) = g^0(x). \tag{1.11}$$

Pour cette situation, cf. M. Zlámal [12], J. L. Lions [3], chapitre 6, paragraphe 5. □

Remarque 1.2. Puisque $\Phi_\varepsilon(0) \neq \Phi(0)$ (si $g \neq 0$!) il y a une *couche limite* pour $t=0$. Si l'on suppose que

$$g \in H^3(\Omega), \quad g, \Delta g = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

et si l'on pose

$$w_\varepsilon = \Phi_\varepsilon - \Phi + g e^{-t/\varepsilon}$$

alors

$$\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|w_\varepsilon'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqq C\sqrt{\varepsilon}$$

où C ne dépend que de la norme de g dans $H^3(\Omega)$. □

Démonstration de (1.6). On introduit :

$$w_\varepsilon(t) = \int_0^T \Phi_\varepsilon(\sigma)\, d\sigma \tag{1.12}$$

et on intègre (1.1) de 0 à t ; il vient (on écrit Φ', Φ'' au lieu de $\partial\Phi/\partial t$, $\partial^2\Phi/\partial t^2$) :

$$\varepsilon\Phi_\varepsilon'(t) - g + \Phi_\varepsilon(t) - \Delta w_\varepsilon(t) = 0. \tag{1.13}$$

On prend le produit scalaire de (1.13) par $-\Delta\Phi_\varepsilon(t)$.

On pose :

$$a(\Phi, \gamma) = \int_\Omega \nabla\Phi \nabla\gamma\, dx, \quad a(\Phi, \Phi) = a(\Phi),$$

$$(\Phi, \gamma) = \int_\Omega \Phi\gamma\, dx, \quad (\Phi, \Phi) = |\Phi|^2.$$

Alors

$$\varepsilon a(\Phi_\varepsilon'(t), \Phi_\varepsilon(t)) + a(\Phi_\varepsilon(t)) + (\Delta w_\varepsilon(t), \Delta\Phi_\varepsilon(t)) = (g, -\Delta\Phi_\varepsilon(t)),$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\varepsilon a(\Phi_\varepsilon(t)) + |\Delta w_\varepsilon(t)|^2] + a(\Phi_\varepsilon(t)) = (g, -\Delta\Phi_\varepsilon(t)). \tag{1.14}$$

Intégrant (1.14) de 0 à t, il vient :

$$\varepsilon a(\Phi_\varepsilon(t)) + |\Delta w_\varepsilon(t)|^2 + 2\int_0^T a(\Phi_\varepsilon(\sigma))\, d\sigma = 2(g, -\Delta w_\varepsilon(t)). \tag{1.15}$$

Il résulte de (1.15) que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\left| \begin{array}{l} \Phi_\varepsilon \text{ (respectif } \sqrt{\varepsilon}\, \Phi_\varepsilon) \text{ demeure dans un ensemble borné de} \\ L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)) \text{ (respectif de } L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega))), \end{array} \right. \tag{1.16}$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta w_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega)), \text{ et donc} \\ w_\varepsilon \text{ dans un borné de } L^\infty(0, T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \end{array} \right. \tag{1.17}$$

On peut alors extraire une sous suite, encore notée Φ_ε, w_ε, telle que

$$\left| \begin{array}{lll} \Phi_\varepsilon \to \Phi & \text{dans} & L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)) \text{ faible,} \\ w_\varepsilon \to w & \text{dans} & L^\infty(0, T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{array} \right. \tag{1.18}$$

D'après (1.12) on a

$$w(t) = \int_0^t \Phi(\sigma)\, d\sigma \tag{1.19}$$

de sorte que (1.13) donne

$$\Phi(t) - \Delta \int_0^t \Phi(\sigma)\, d\sigma = g$$

d'où le résultat désiré. □

2. Problème de contrôle ponctuel perturbé

Nous reprenons maintenant le problème (9) de l'Introduction, qui admet une solution unique u_ε, caractérisée par le *système d'optimalité* suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon y_\varepsilon'' + y_\varepsilon' - \Delta y_\varepsilon = u_\varepsilon \delta(x-b), \\ \varepsilon p_\varepsilon'' - p_\varepsilon' - \Delta p_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

$$\left| \begin{array}{l} y_\varepsilon(x, 0) = y_\varepsilon'(x, 0) = 0, \\ p_\varepsilon(x, T) = 0, \quad \varepsilon p_\varepsilon'(x, T) = -\big(g_\varepsilon(x, T) - z_d(x)\big) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

$$y_\varepsilon = p_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \tag{2.3}$$

et

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^T (p_\varepsilon(b, t) + N u_\varepsilon(t))(v(t) - u_\varepsilon(t))\, dt \geqq 0 \quad \forall v \in \mathscr{U}_{ad}, \\ u_\varepsilon \in \mathscr{U}_{ad}. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1. On a [1)]

$$p_\varepsilon(b, t) \in L^2(0, T) \tag{2.5}$$

de sorte que (2.4) a un sens. □

---

[1] C'est la propriété «duale» de (5) Introduction, démontrée directement par L. Nirenberg [9].

Sous l'hypothèse (19) de l'Introduction, le problème (20) de l'Introduction admet une solution unique u, qui est caractérisée par le système d'optimalité suivant:

$$(2.6)\qquad \left| \begin{array}{l} y' - \Delta y = u\delta(x, b), \\ -p' - \Delta p = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \end{array} \right.$$

$$(2.7)\qquad \left| \begin{array}{l} y(x, 0) = 0, \\ p(x, T) = y(x, T) - z_d(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{array} \right.$$

$$(2.8)\qquad y = p = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

et

$$(2.9)\qquad \left| \begin{array}{l} \int_0^T (p(b, t) + Nu(t))(v(t) - u(t))\, dt \geqq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{U}^{(n)}(0, T), \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{U}^{(n)}(0, T). \end{array} \right.$$

Remarque 2.2. On a montré dans J. L. Lions [4]—[5] que

$$(2.10)\qquad p(b, t) \in (\mathcal{U}^{(n)}(0, T))'$$

de sorte que (2.9) a un sens. □

Remarque 2.3. Dans un sens que l'on va préciser, le système (2.6)...(2.9) est limite du système (2.1)...(2.4). La condition

$$p(x, T) = y(x, T) - z_d(x) \quad \text{sur} \quad \Omega$$

provient des conditions (2.2) pour p_ε, comme l'explique le №1 (avec, par rapport au №1, un changement de signe dû au fait que pour p_ε on intègre en t dans le sens rétrograde). □

On va montrer que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$(2.11)\qquad \left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \to u \quad \text{dans} \quad L^2(0, T) \quad \text{faible}, \\ y_\varepsilon(\cdot, T) \to y(\cdot, T) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible}. \end{array} \right.$$

On commence par observer que (grâce au fait que $\mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{U}^{(n)}(0, T)$ n'est pas vide) $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqq C$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Donc

$$(2.12)\qquad \left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \ \ (\text{respectif } y_\varepsilon(\cdot, T)) \quad \text{demeure dans un borné de} \quad L^2(0, T) \\ (\text{respectif de} \quad L^2(\Omega)). \end{array} \right.$$

On peut donc extraire une sous suite, encore notée $u_\varepsilon, y_\varepsilon(\cdot, T)$, telle que

$$(2.13)\qquad \left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \to u^* \quad \text{dans} \quad L^2(0, T) \quad \text{faible}, \\ y_\varepsilon(\cdot, T) \to \eta \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible}. \end{array} \right.$$

Il résulte alors du №1 que

$$(2.14)\qquad p_\varepsilon \to p^* \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{faible}$$

où p^* est caractérisé par

(2.15)
$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial p^*}{\partial t}-\Delta p^*=0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ p^*(x,T)=\eta(x)-z_d(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ p^*=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma. \end{array}\right.$$

On peut vérifier que

(2.16)
$$p_\varepsilon(b,t)\to p^*(b,t) \quad \text{dans} \quad (\mathscr{U}^{(n)}(0,T))' \quad \text{faible.}$$

Considérons (2.4) pour $v\in\mathscr{U}_{ad}\cap\mathscr{U}^{(n)}(0,T)$, que nous écrivons

(2.17)
$$\int_0^T p_\varepsilon(b,t)v(t)\,dt+N\int_0^T u_\varepsilon(t)v(t)\,dt \geqq \int_0^T p_\varepsilon(b,t)u_\varepsilon(t)\,dt+N\int_0^T u_\varepsilon(t)^2\,dt.$$

Mais par application de la formule de Green,

(2.18)
$$\left|\int_0^T p_\varepsilon(b,t)u_\varepsilon(t)\,dt=\int_Q(\varepsilon y_\varepsilon''+y_\varepsilon'-\Delta y_\varepsilon)p_\varepsilon\,dx\,dt=\big(y_\varepsilon(T),\,y_\varepsilon(T)-z_d\big)\right.$$

de sorte que (2.17) s'écrit

(2.19)
$$\int_0^T\big(p_\varepsilon(b,t)+Nu_\varepsilon(t)\big)v(t)\,dt\geqq\big(y_\varepsilon(T),\,y_\varepsilon(T)-z_d\big)+N\int_0^T u_\varepsilon^2\,dt.$$

On peut passer à la limite dans (2.19). Il vient :

(2.20)
$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T\big(p^*(b,t)+Nu^*(t)\big)v(t)dt\geqq(\eta,\eta-z_d)+N\int_0^T(u^*)^2\,dt \\ \forall v\in\mathscr{U}_{ad}\cap\mathscr{U}^{(n)}(0,T). \end{array}\right.$$

Notons maintenant que

(2.21)
$$\left|\begin{array}{l} y_\varepsilon\to y^* \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;\,H^{1-n/2-\beta}(\Omega)) \quad \text{faible étoile} \\ \text{où } \beta \text{ est } >0 \quad \text{quelconque} \end{array}\right.$$

où y^* est la solution de

(2.22)
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y^*}{\partial t}-\Delta y^*=u^*\delta(x,b), \\ y^*(x,0)=0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad y^*=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma. \end{array}\right.$$

Admettant un instant ce point, il en résulte que

(2.23)
$$\eta=y^*(x,T) \quad \text{dans} \quad \Omega$$

de sorte que (2.22), (2.15) et (2.20) coïncide avec le système d'optimalité (2.6)...(2.9), lequel admet une solution unique. Donc $u^*=u$, $y^*=y$, $p^*=p$ et l'on a, en particulier, le résultat (2.11), sous réserve de vérifier (2.21) et (2.22).

Tous revient à montrer que

$$\text{(2.24)} \quad \left| \begin{array}{l} y_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H^{1-n/2-\beta}(\Omega)) \\ \text{où } \beta \text{ est } > 0. \end{array} \right.$$

Posons : $A = -\Delta$, avec les conditions aux limites de Dirichlet.
Nous utilisons les puissances fractionnaires A^s, $s \in \boldsymbol{R}$.
Prenons le produit scalaire de $(2.1)_1$ par $A^{-\vartheta} y'_\varepsilon$, ϑ à choisir.
Il vient :

(2.25)

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}|A^{-\vartheta/2}y''_\varepsilon|^2 + |A^{-\vartheta/2}y'_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{(1-\vartheta)/2}y_\varepsilon|^2 = (A^{-\vartheta/2}\delta(x, b),\ A^{-\vartheta/2}y'_\varepsilon)\, u_\varepsilon(t).$$

Choisissons ϑ de manière que

$$\text{(2.26)} \qquad A^{-\vartheta/2}\delta(x-b) \in L^2(\Omega).$$

Comme $\delta(x-b) \in H^{-\sigma}(\Omega)$ si $\sigma > n/2$, on a

$$A^{-\vartheta/2}\delta(x-b) \in H^{\vartheta-\sigma}(\Omega) \quad \text{d'où (2.26)} \quad \text{si} = \sigma > n/2.$$

Avec ce choix de ϑ, le $2^{\text{ème}}$ membre de (2.25) est majoré par

$$C|u_\varepsilon(t)|\,|A^{-\vartheta/2}y'_\varepsilon|$$

d'où résulte que

$$A^{-\vartheta/2}y'_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

et que

$$A^{(1-\vartheta)/2}y_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

d'où résulte (2.24). □

Bibliographie

[1] LI TA-TSIEN [LI DA-QIAN]: Propriétés d'espaces fonctionnels intervenant en contrôle optimal. - C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 289, 1979, 687—690.

[2] LI TA-TSIEN [LI DA-QIAN]: Propriétés d'espaces fonctionnels et problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par les équations paraboliques. - C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 290, 1980, 697—700.

[3] LIONS, J. L.: Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal. - Lecture Notes in Mathematics 323. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1973.

[4] LIONS, J. L.: Function spaces and optimal control of distributed systems. - [Lecture notes.] Universidade Federal do Rio de Janeiro, Istituto de Matematico, Rio de Janeiro, 1980.

[5] LIONS, J. L.: Some methods in the mathematical analysis of systems and their control. - Science Press, Beijing/Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1981.

[6] LIONS, J. L.: Some questions in the optimal control of distributed systems. - Actes du congrès international tenu à l'occasion du 50ème anniversaire de l'Institut Mathématique Steklov, Moscou, Sept. 24—26, et Léningrad, Sept. 27—28, 1984. (A paraître.)

[7] Lions, J. L., et E. Magenes: Problèmes aux limites non homogènes et applications. 1. - Travaux et recherches mathématiques 17. Dunod, Paris, 1968.

[8] Meyer, Y.: Étude d'un modèle mathématique issu du contrôle des structures spatiales déformables. - Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar. VII. Editeurs: H. Brézis et J. L. Lions. Research Notes in Mathematics 122. Pitman Advanced Publishing Program, Boston—London—Melbourne, 1985, 234—242.

[9] Nirenberg, L.: Communication personnelle.

[10] Shih Shu-Chung: Sur une classe d'espaces fonctionnels intervenant en contrôle optimal. - C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 290, 1980, 761—764.

[11] Simon, J.: Contrôle de la solution d'une équation parabolique avec donné ponctuelle. - J. Systems Sci. Math. Sci. 3:1, 1983, 1—27.

[12] Zlámal, M.: Sur un problème mixte pour des équations hyperboliques avec un petit paramètre - Czechoslovak Math. J. 10, 1960, 83—122 (en Russe).

Collège de France
F-75231 Paris Cedex 05
France

Reçu le 17 septembre 1984