Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 13, 1988, 25–70

SOLUTIONS DE L'EQUATION DE BELTRAMI AVEC $\|\mu\|_\infty = 1$

Guy David

0. Introduction

Le but de ce texte est de résoudre l'équation de Beltrami $\partial f/\partial \bar{z} = \mu(z)(\partial f/\partial z)$ pour une classe de fonctions μ, définies sur le plan complexe, telles que $|\mu(z)| < 1$ presque-partout, mais pas nécessairement $\|\mu\|_\infty < 1$. On montrera que si $\alpha > 0$ et $C \geq 0$ sont des constantes, et si μ est une fonction mesurable telle que $|\{z \in \mathbf{C}; |\mu(z)| > 1-\varepsilon\}| \leq Ce^{-\alpha/\varepsilon}$ pour tout ε assez petit, alors il existe un unique homéomorphisme f du plan complexe fixant $0, 1$, et ∞, et qui a des dérivées partielles localement intégrables telles que $\partial f/\partial \bar{z} = \mu(\partial f/\partial z)$ presque-partout.

Ce résultat est énoncé plus précisément au Paragraphe 1, où l'on donne aussi quelques estimations sur la fonction f. Le point central de la démonstration est l'existence d'estimations a priori sur la taille de $f(z) - f(z')$, pour $z \neq z'$, dans un cas particulier important. L'idée est de reprendre la démonstration de Bojarski en raffinant un peu les estimations. C'est le but du Paragraphe 2. Le cas général sera obtenu à partir du cas particulier en composant avec un homéomorphisme quasiconforme. On obtient ainsi aux Paragraphes 4, 5, et 6 des estimations a priori sur la solution de l'équation de Beltrami; on en déduit le théorème d'existence par un passage à la limite (Paragraphe 7). L'unicité de la solution est démontrée au Paragraphe 8.

On donne au Paragraphe 9 quelques conséquences faciles du théorème d'existence et d'unicité. La Paragraphe 10 est destiné à montrer que la solution f dépend analytiquement de μ dans certaines directions (essentiellement les directions pour lesquelles on reste dans la classe des dilatations μ que l'on sait traiter). On donne au Paragraphe 11 un exemple de groupe de transformations du type étudié plus haut, et le Paragraphe 12 contient quelques exemples. [Il est fort probable que ces exemples soient fort classiques.]

L'existence d'homéomorphismes admettant une dilatation donnée μ, avec $\|\mu\|_\infty = 1$, a été étudiée il y a quelques années par O. Lehto ([L1], [L2]). Lorsque l'ensemble des singularités de $\left(1 - |\mu|\right)^{-1}$ n'est pas trop pathologique (c-à-d. en supposant que $\left(1 - |\mu|\right)^{-1}$ est localement bornée hors d'un compact), Lehto obtient, par des estimations de module assez précises, un théorème d'existence pour

doi:10.5186/aasfm.1988.1303

toute fonction μ telle que, pour tout $z \in \mathbf{C}$ et tous $0 < r_1 < r_2 < \infty$, l'intégrale

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(1 + 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\left|1 - e^{-2i\theta}\mu(z + re^{i\theta})\right|^2}{1 - \left|\mu(z + re^{i\theta})\right|^2}\, d\theta\right)^{-1} \frac{dr}{r}$$

est strictement positive, et tend vers $+\infty$ quand $r_1 \to 0^+$ ou $r_2 \to +\infty$. Même si l'on oublie toute information sur l'argument de μ et si l'on remplace $\left|1-e^{-2i\theta}\mu(z+re^{i\theta})\right|^2$ par 4, la condition de Lehto est plus faible que celle mentionnée plus haut. Ce texte n'est donc intéressant que dans la mesure où les méthodes utilisées sont assez différentes et, peut-être, des estimations plus précises sur la solution sont démontrées (ce qui permet d'obtenir l'unicité assez facilement, ou de ne pas se soucier de la localisation des singularités de $\left(1 - |\mu|^{-1}\right)$.

L'auteur souhaite remercier M. Herman, qui est à l'origine de ce travail, F. Gehring, D. Hamilton et S. Semmes qui lui ont notamment révélé l'existence de [L1], et le referee, dont les nombreuses suggestions rendront sûrement cet article nettement plus compréhensible.

1. Définitions et énoncé du théorème d'existence

Définition 1. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Nous dirons que la fonction mesurable $\mu\colon \mathcal{U} \to D(0,1) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$ vérifie une condition logarithmique s'il existe $\alpha > 0, C_0 \geq 0$ et $\varepsilon_0 \in]0,1]$ tels que

$$\left|\{z; |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\}\right| \leq C_0 e^{\alpha} e^{-\alpha/\varepsilon} \quad \text{pour tout } \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{1}$$

On notera cela $\mu \in CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$.

Le plus souvent, $\mathcal{U}$ sera $\mathbf{C}$ tout entier, et l'on notera simplement $CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ au lieu de $CL_{\mathbf{C}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$. Le facteur de normalisation e^{α} a été ajouté pour que $CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0) \subset CL(\alpha', C_0, \varepsilon_0)$ pour tout $\alpha' < \alpha$, et pour que le support de $\mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$ ait une mesure inférieure à C_0.

Définition 2. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbf{C}, \mu \in CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ et $f\colon \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ un homéomorphisme. Nous dirons que f est μ-conforme si f est absolument continu sur les lignes (nous abrégerons en ACL) et si $\partial f/\partial \bar{z} = \mu(z)(\partial f/\partial z)$ presque-partout.

Nous ferons à l'occasion l'abus de langage suivant: nous dirons que f est μ-conforme (sans référence à un μ particulier) lorsqu'il existe un $\mu \in CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ tel que f soit μ-conforme (au sens précédent).

Remarque. Si f est un homéomorphisme et est ACL, alors, par un résultat de Lehto et Gehring, f est différentiable presque-partout (ce qui justifie la définition). Nous verrons plus tard que f a en fait des dérivées partielles dans L^p_{loc} pour tout $p < 2$. Pour plus de détails (par exemple en ce qui concerne la définition de l'ACL), nous renvoyons à Ahlfors [A], pp. 24–27.

Avant d'énoncer le théorème, il nous faut encore quelques notations: T désignera la transformation de Beurling (l'opérateur pseudodifférentiel de symbole $\xi/\bar{\xi}$ et C_p, $p \geq 2$, sa norme sur L^p. On sait (voir par exemple [S]) que $1 \leq C_p < +\infty$ pour tout $p < \infty$, ce qui permet de définir un nombre $m > 0$ par

(2) $$m = \sup_{p>2} \frac{p-2}{2p \operatorname{Log} C_p}.$$

Théorème 1. *Soit $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$. Alors il existe un homéomorphisme du plan $f = f_\mu$, fixant $0, 1$ et ∞, ayant des dérivées dans L^q_{loc} pour tout $q < 2$ et tel que*

(3) $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{presque-partout.}$$

De plus, si $M \geq 2$ et $0 < \delta < m\alpha$ sont données, alors il existe une constante $C = C(\alpha, \delta, M, C_0, \varepsilon_0)$ telle que, si $z, z' \in D(0, M)$, on ait

(4) $$|f(z') - f(z)| \leq C \left(\operatorname{Log} \left(2 + \frac{1}{|z' - z|} \right) \right)^{-\delta}.$$

De même, pour tout $M \geq 2$, il existe $C = C(\alpha, M, C_0, \varepsilon_0)$ tel que, pour $z, z' \in D(0, M)$, on ait

(5)
$$|f(z') - f(z)| \geq \frac{1}{C} \exp - \frac{4}{\alpha} \left\{ \operatorname{Log} \left(2 + \frac{1}{|z' - z|} \right) \right\}^2 \exp \left(-C \operatorname{Log} \left(2 + \frac{1}{|z' - z|} \right) \right).$$

Enfin, il existe une constante universelle $\theta > 0$ telle que, pour tout $\varrho < \theta\alpha$ et tout $M \geq 2$, il existe $C = C(\alpha, M, \varrho, C_0, \varepsilon_0)$ telle que,pour tout ensemble mesurable E contenu dans $D(0, M)$,

(6) $$|f(E)| \leq C \left(\operatorname{Log} \left(2 + \frac{1}{|E|} \right) \right)^{-\varrho}$$

et

(7) $$|f(E)| \geq C \exp - \frac{A}{\alpha} \left(\operatorname{Log} \left(2 + \frac{1}{|E|} \right) \right)^2,$$

où A est une constante universelle.

Naturellement, les constantes qui interviennent dans (4)–(7) ne dépendent pas de μ.

Remarques. Nous verrons au Paragraphe 8 que f_μ est unique.

D'autre part, le fait que f_μ a des dérivées partielles localement intégrables entraîne que f_μ est ACL (voir par exemple Ahlfors [A], p. 28).

Enfin, nous donnerons au Paragraphe 12 des exemples montrant que, en un sens, f peut se comporter presque aussi mal que (4) et (5) le laissent supposer. Nous verrons aussi que la condition de croissance logarithmique imposée à μ n'est pas si déraisonnable, si l'on veut assurer que f_μ soit un homéomorphisme du plan.

La démonstration du théorème occupe les six prochains paragraphes.

2. Construction de h^μ pour α assez grand et $\varepsilon_0 = 1$

Nous voulons dans ce paragraphe obtenir un maximum d'informations sur la solution de (3) lorsque celle-ci peut être obtenue à partir d'une série de puissances (comme dans la démonstration de Bojarski du théorème d'existence lorsque μ est à support compact).

On s'intéresse donc à ce que sera la solution de $\partial h/\partial \bar{z} = \mu(\partial h/\partial z)$ telle que $(\partial h/\partial z) - 1$ tende vers 0 à $1'\infty$ (en un sens à préciser). Rappelons que, lorsque $\|\mu\|_\infty < 1$ et μ est à support compact, la solution h^μ de $\partial h^\mu/\partial \bar{z} = \mu(\partial h^\mu/\partial z)$ fixant 0 et telle que $(\partial h^\mu/\partial z) - 1 \in L^p$ pour un $p > 2$ est donnée par

$$h^\mu(z) = P\big(\mu(f+1)\big)(z) + z, \tag{8}$$

où

$$f = T\mu + T\mu T\mu + \cdots + T\mu \ldots T\mu + \cdots, \tag{9}$$

et P est défini par

$$Pg(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int\!\!\int g(z)\left(\frac{1}{z-\xi} - \frac{1}{z}\right) d\sigma(z) \tag{10}$$

où $d\sigma(z)$ est la mesure de Lebesgue sur le plan complexe.

On a alors les relations

$$\frac{\partial h^\mu}{\partial \bar{z}} = \mu(f+1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h^\mu}{\partial z} = f+1 \tag{11}$$

(voir Ahlfors, pp. 91–92).

Proposition 1. *Soient $\alpha > 2/m$ et $2 < \gamma < \alpha m$. Il existe une constante $C(\alpha,\gamma)$ telle que, si $\mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$, alors la série donnant f dans (9) converge dans L^2, et (8) définit une fonction h^μ telle que*

$$\left|h^\mu(z) - z\right| \le C(\alpha,\gamma) C_0^{1/2}\left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{C_0^{1/2}}{|z|}\right)\right)^{-\gamma+2}. \tag{12}$$

La démonstration de cette proposition est un peu technique et occupera le reste de ce paragraphe. Avant de nous lancer dans les calculs, donnons une idée de notre stratégie. Appelons $f_n = T\mu \ldots T\mu$ (n fois), de sorte que $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ si la série consent à converger. Il serait trop optimiste d'espérer montrer que la série converge dans L^p pour un $p > 2$, et des estimations L^2 seules ne nous suffisent pas (le noyau de P n'est pas dans L^2 au voisinage de 0). Nous allons donc jouer à la fois sur les normes L^2 et L^p, en espérant montrer que la série $\sum f_n$ converge dans un espace intermédiare entre L^2 et L^p, comme par exemple l'espace des fonctions g telles que $|g|^2\{\mathrm{Log}(1+|g|)\}^N$ soit intégrable. Pratiquement, nous ne prononcerons pas le mot "interpolation", et nous ne parlerons d'aucun espace fonctionnel autre que L^2 ou L^P, mais nous démontrerons les estimations correspondantes sur les fonctions de répartition des f_n.

Dans la suite, on notera C toute constante ne dépendant que de α et de γ. On se donne aussi, une fois pour toutes, une valeur de p telle que $(p-2)/(2p\,\mathrm{Log}\,C_p)$ soit très proche de m.

Lemme 1. *On a* $\|f_n\|_p^p \le CC_0C_p^{np}$ *et* $\|f_n\|_2^2 \le CC_0(n+1)^{-2\gamma}$.

Comme $\mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$, on a $\|\mu\|_p^p \le CC_0$, d'où l'on déduit aisément la première inégalité. On en déduit aussitôt que

$$|\{|f_n| > \lambda\}| \le CC_0C_p^{np}\lambda^{-p} \quad \text{pour tout } \lambda > 0. \tag{13}$$

Démontrons un petit résultat intermédiaire en vue de la seconde inégalité:

Lemme 2. *Soit* E *un ensemble mesurable. Alors*

$$\int_E |f_n|^2 \le CC_0^{2/p}C_p^{2n}|E|^{(p-2)/p}. \tag{14}$$

Soit en effet λ_0 tel que $|E| = C_0C_p^{np}/\lambda_0^p$, c-à-d. $\lambda_0 = C_0^{1/p}C_p^n|E|^{-1/p}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_E |f_n|^2 &= \int_{E\cap\{|f_n|\le\lambda_0\}} |f_n|^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{E\cap\{\lambda_0 2^k<|f_n|\le\lambda_0 2^{k+1}\}} |f_n|^2 \\ &\le |E|\lambda_0^2 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+2}\lambda_0^2|\{\lambda 2^k < |f_n|\}|.\end{aligned}$$

On utilise (13) et on obtient

$$\begin{aligned}\int_E |f_n|^2 &\le C_0^{2/p}C_p^{2n}|E|^{(p-2)/p} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+2}\lambda_0^2 CC_0C_p^{np}\lambda_0^{-p}2^{-kp} \\ &\le C_0^{2/p}C_p^{2n}|E|^{(p-2)/p} + C\left(C_0^{1/p}C_p^n|E|^{-1/p}\right)^{2-p} C_0C_p^{np} \\ &\le CC_0^{2/p}C_p^{2n}|E|^{(p-2)/p},\end{aligned}$$

ce qui démontre le Lemme 2.

Pour poursuivre la démonstration du Lemme 1, on choisit β tel que $\gamma < \beta < \alpha(p-2)/(2p\,\mathrm{Log}\,C_p)$, ce qui est possible si on a choisi p convenablement. Soit $\eta = \big(\alpha(p-2)\big)/(\beta p) - 2\,\mathrm{Log}\,C_p > 0$.

Lemme 3. *Si* $n > \beta$,

$$\|f_n\|_2^2 \leq (1-\beta/n)^2\,\|f_{n-1}\|_2^2 + CC_0e^{-\eta n}.$$

Ecrivons

$$\|f_n\|_2^2 = \|T\mu f_{n-1}\|_2^2 = \|\mu f_{n-1}\|_2^2 = \int_{\{|\mu|\leq 1-\varepsilon\}} |\mu^2 f_{n-1}^2| + \int_{\{|\mu|>1-\varepsilon\}} |\mu^2 f_{n-1}^2|$$

où $\varepsilon > 0$ sera choisi dans un instant. Appliquons le Lemme 2 avec $E = \{|\mu| > 1-\varepsilon\}$; il vient

$$\|f_n\|_2^2 \leq (1-\varepsilon)^2\,\|f_{n-1}\|_2^2 + CC_0^{2/p}C_p^{2n}|E|^{(p-2)/p}$$

et, puisque $\mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$, ceci est inférieur à

$$(1-\varepsilon)^2\,\|f_{n-1}\|_2^2 + CC_0^{2/p}C_p^{2n}C_0^{(p-2)/p}e^{\alpha(p-2)/p}e^{-\alpha(p-2)/p\varepsilon}.$$

On suppose maintenant que n est assez grand, on choisit $\varepsilon = \beta/n$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_2^2 &\leq (1-\frac{\beta}{n})^2\,\|f_{n-1}\|_2^2 + CC_0C_p^{2n}e^{-\alpha(p-2)n/p\beta}\\
&\leq (1-\frac{\beta}{n})^2\,\|f_{n-1}\|_2^2 + CC_0C_p^{2n}e^{-(\eta+2\,\mathrm{Log}\,C_p)n}\\
&\leq (1-\frac{\beta}{n})^2\,\|f_{n-1}\|_2^2 + CC_0e^{-\eta n}
\end{aligned}$$

comme promis.

Poursuivons notre estimation de $\|f_n\|_2^2$:

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_2^2 &\leq CC_0e^{-\eta n} + (1-\frac{\beta}{n})^2\,\|f_{n-1}\|_2^2\\
&\leq CC_0e^{-\eta n} + CC_0(1-\frac{\beta}{n})^2e^{-\eta(n-1)} + (1-\frac{\beta}{n})^2(1-\frac{\beta}{n-1})^2\,\|f_{n-2}\|_2^2\\
&\dots\\
&\leq CC_0e^{-\eta n} + CC_0(1-\frac{\beta}{n})^2e^{-\eta(n-1)} + \cdots\\
&\cdots + CC_0(1-\frac{\beta}{n})^2\dots(1-\frac{\beta}{k+1})^2e^{-\eta k} + (1-\frac{\beta}{n})^2\dots(1-\frac{\beta}{k})^2\,\|f_{k-1}\|_2^2\\
&\leq CC_0\left(e^{-\eta n} + e^{-\eta(n-1)} + \cdots + e^{-\eta k}\right) + \left(\prod_{j=k}^{n}(1-\frac{\beta}{j})^2\right)\|f_{k-1}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Avant de choisir k, estimons le produit $\pi(k,n) = \prod_{j=k}^{n}(1-\beta/j)^2$:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\pi(k,n) = \sum_{j=k}^{n}\operatorname{Log}(1-\frac{\beta}{j}) \le \int_k^{n+1}\operatorname{Log}(1-\frac{\beta}{x})\,dx$$
$$\le \int_k^{n+1}\left(-\frac{\beta}{x}+\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx \le -\beta\operatorname{Log}\frac{n+1}{k}+\frac{\beta^2}{k},$$

d'où $\pi(k,n) \le \left((n+1)/k\right)^{-2\beta}e^{2\beta^2/k}$, et

$$\|f_n\|_2^2 \le CC_0e^{-k\eta} + C\left(\frac{n+1}{k}\right)^{-2\beta}\|f_{k-1}\|_2^2,$$

au moins si l'on a choisi $k \ge 2\beta$.

On choisit maintenant k tel que $2\beta\operatorname{Log}(n+1)/\eta \le k < 1+2\beta\operatorname{Log}(n+1)/\eta$, lorsque n est assez grand pour que $n > k > 2\beta$. Alors

$$\|f_n\|_2^2 \le CC_0\exp -\eta\left(\frac{2\beta}{\eta}\operatorname{Log}(n+1)\right) + C\left(\frac{n+1}{\operatorname{Log}(n+1)}\right)^{-2\beta}\|f_{k-1}\|_2^2$$
$$\le CC_0(n+1)^{-2\beta} + C\left(\frac{n+1}{\operatorname{Log}(n+1)}\right)^{-2\beta}C_0$$
$$\le CC_0(n+1)^{-2\gamma}.$$

Bien entendu, quitte à changer C, cette inégalité reste vraie pour les petites valeurs de n, et le Lemme 1 est démontré.

Nous avons maintenant assez de contrôle sur la taille de f_n pour commencer à estimer

$$|h^\mu(z)-z| = |P(\mu(f+1))(z)| \le \frac{1}{\pi}\int|\mu(w)||f(w)+1||\frac{z}{(w-z)w}|d\sigma(w).$$

Bien que les calculs qui suivent soient un peu longs, l'idée qui les sous-tend est très simple: on a un contrôle assez bon sur $\|f_n\|_2$ et un certain contrôle sur $\|f_n\|_p$, ce qui permet un contrôle assez bon sur f_n dans un espace fonctionnel intermédiare très proche de L^2; comme le noyau de P est presque dans L^2 localement, on pourra estimer l'intégrale donnant $h^\mu(z)-z$.

Pour simplifier les écritures, on notera $f_0 = 1$, de sorte que

$$|h^\mu(z)-z| \le \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int|\mu(w)f_n(w)||\frac{z}{(z-w)w}|\,d\sigma(w). \tag{15}$$

Notons

$$I_n = \int |\mu(w) f_n(w)| \left| \frac{z}{(z-w)w} \right| d\sigma(w) \tag{16}$$

et, pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$E_{n,k} = \{ w \in \mathbf{C};\ |\mu(w) f_n(w)| \in]2^{k-1}, 2^k] \}. \tag{17}$$

Soit encore

$$I_{n,k} = \int_{E_{n,k}} 2^k \left| \frac{z}{(z-w)w} \right| d\sigma(w). \tag{18}$$

Alors

$$|h^\mu(z) - z| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} \sum_{k \in \mathbf{Z}} I_{n,k}. \tag{19}$$

Nous devons donc majorer les $I_{n,k}$. Commençons par un lemme.

Lemme 4. *Soit E un ensemble mesurable. Alors*

$$\int_E \left| \frac{z}{(w-z)w} \right| d\sigma(w) \leq C|E|^{1/2}. \tag{20}$$

Si le plus $|E| \geq 4|z|^2$, on a un peu mieux:

$$\int_E \left| \frac{z}{(w-z)w} \right| d\sigma(w) \leq C|z| \operatorname{Log} \frac{|E|}{|z|^2}. \tag{21}$$

Pour démontrer ce lemme, on commence par établir l'inégalité

$$\left| \left\{ \left| \frac{1}{(w-z)w} \right| > 2^k \right\} \right| \leq C 2^{-k} \quad \text{pour } 2^{-k} \geq |z|^2/4. \tag{22}$$

En effet, si $|w-z||w| < 2^{-k}$, alors $|w| < 2^{-k/2}$ ou $|w-z| < 2^{-k/2}$; chacun des deux ensembles correspondants a une mesure $\leq C 2^{-k}$, ce qui prouve (22). De même,

$$\left| \left\{ \left| \frac{1}{(w-z)w} \right| > 2^k \right\} \right| \leq C \frac{2^{-2k}}{|z|^2} \quad \text{dès que } 2^{-k} \leq 4|z|^2. \tag{23}$$

En effet, si $\frac{1}{4}|z|^2 \leq 2^{-k} \leq 4|z|^2$, alors (23) découle de (22). Si $|w-z||w| < 2^{-k} < \frac{1}{4}|z|^2$, alors ou bien $|z-w| < |z|/2$, et donc $|w| \geq |z|/2$ et $|z-w| <$

$2^{-k}/|w| \leq 2^{-k}2/|z|$, ou bien $|z-w| \geq |z|/2$ et alors $|w| \leq 2^{-k}2/|z|$. La mesure de chacun des deux ensembles correspondants est inférieure à $\pi 2^{-2k}4/|z|^2$; on en déduit (23).

Revenons à l'ensemble E du Lemme 4. Commençons par le cas où $|E| \leq 4|z|^2$, et choisissons k tel que $|E||z|^2 \leq 2^{-2k} \leq 4|E||z|^2$. On a

$$\int_E \left|\frac{1}{(z-w)w}\right| \leq |E|2^k + \sum_{l>k} 2^{l+1} \left|\left\{w \in \mathbf{C} ; 2^l < \frac{1}{|z-w||w|} < 2^{l+1}\right\}\right|.$$

Comme $2^{-l} \leq 2^{-k} \leq \left(4|E||z|^2\right)^{1/2} \leq 4|z|^2$, on peut utiliser (23), ce qui donne

$$\int_E \left|\frac{1}{(z-w)w}\right| \leq |E|2^k + \sum_{l \geq k} 2^{l+1} C \frac{2^{-2l}}{|z|^2} \leq |E|2^k + C\frac{2^{-k}}{|z|^2} \leq \frac{C|E|^{1/2}}{|z|},$$

ce qui prouve (20) après multiplication par $|z|$.

Dans le cas où $|E| \geq 4|z|^2$, on écrit encore

$$\int_E \left|\frac{1}{(z-w)w}\right| \leq |E|2^k + \sum_{l>k} 2^{l+1} \left|\left(w ; 2^l < \frac{1}{|z-w||w|} \leq 2^{l+1}\right)\right|,$$

où l'on a choisi k tel que $|E| \leq 2^{-k} \leq 2|E|$.

On a $2^{-k} \geq |E| \geq 4|z|^2$, ce qui permet d'appliquer (22). Soit k_0 tel que $|z|^2 \leq 2^{-k_0} \leq 2|z|^2$ (ainsi, $k_0 > k$). On coupe la somme en deux, et on applique (22) pour $l < k_0$ et (23) pour $l \geq k_0$:

$$\begin{aligned}
\int_E \left|\frac{1}{(z-w)w}\right| &\leq |E|2^k + \sum_{k \leq l < k_0} 2^{l+1} C 2^{-l} + \sum_{l \geq k_0} 2^{l+1} C \frac{2^{-2l}}{|z|^2} \\
&\leq |E|2^k + C \sum_{k \leq l < k_0} 1 + \sum_{l \geq k_0} C \frac{2^{-l}}{|z|^2} \\
&\leq 2^k|E| + C(k_0 - k) + C\frac{2^{-k_0}}{|z|^2} \\
&\leq C(k_0 - k + 2).
\end{aligned}$$

Comme $k_0 - k + 2 \leq 3 + \left(\mathrm{Log}(|E|/|z|^2)\right)/\,\mathrm{Log}\,2$, on en déduit (21) en multipliant par $|z|$.

Appliquons le Lemme 4 à $E_{n,k}$ pour majorer l'intégrale $I_{n,k}$ définie par (18). Il vient

$$I_{n,k} \leq C2^k|E_{n,k}|^{1/2} \tag{24}$$

dans tous les cas, et

$$I_{n,k} \leq C2^k|z| \operatorname{Log} \frac{|E_{n,k}|}{|z|^2} \tag{25}$$

dès que $|E_{n,k}| \geq 4|z|^2$.

Il s'agit maintenant d'estimer les $|E_{n,k}|$. On peut utiliser (13) ou la seconde inégalité du Lemme 1, ce qui nous donne deux estimations de $|E_{n,k}|$ entre lesquelles on pourra choisir:

$$|E_{n,k}| \leq \frac{CC_0C_p^{np}}{2^{kp}} \quad \text{et} \quad |E_{n,k}| \leq \frac{CC_0(n+1)^{-2\gamma}}{2^{2k}}.$$

Pour simplifier un peu, notons $a_n = C_0^{1/2}(n+1)^{-\gamma}$ et $b_n = C_0^{1/p}C_p^n$, de sorte que

$$|E_{n,k}| \leq Cb_n^p 2^{-kp}, \tag{26}$$

$$|E_{n,k}| \leq Ca_n^2 2^{-2k}. \tag{27}$$

Nous allons d'abord sommer les $I_{n,k}$ sur les n et k tels que

$$2^k \geq a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)}. \tag{28}$$

Pour tous ces termes, nous utiliserons (26) de préférence à (27). On s'intéresse d'abord au cas où

$$2^k \geq \frac{Cb_n}{(4|z|^2)^{1/p}}, \tag{29}$$

où C est comme en (26).

Alors, comme $|E_{n,k}| \leq 4|z|^2$, on utilise (24) qui donne

$$I_{n,k} \leq C2^k b_n^{p/2} 2^{-kp/2}, \text{ c-à-d.}$$

$$I_{n,k} \leq Cb_n^{p/2} 2^{-k(p-2)/2}. \tag{30}$$

Pour savoir s'il vaut mieux choisir (28) ou (29) pour déterminer k, on est amené à introduire le nombre n_0 (non nécessairement entier) tel que

$$a_{n_0}^{-1} b_{n_0} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^{(p-2)/p} \quad \text{si} \quad |z|^2 \leq C_0, \tag{31}$$

et $n_0 = 0$ sinon.

Notons que $a_0^{-1} b_0 = C_0^{(2-p)/2p}$, de sorte que l'idée de choisir $n_0 = 0$ si $|z|^2 > C_0$ n'est pas déraisonnable.

Supposons maintenant que $n \geq n_0$. On décide de sommer sur tous les k vérifiant (28). (On vérifierait sans peine que, grâce à notre choix de n_0, (28) entraîne pratiquement (29) pour $n \geq n_0$.) Soit k_0 le plus petit entier satisfaisant à (28). Alors, grâce à (30),

$$\sum_{k \geq k_0} I_{n,k} \leq C b_n^{p/2} 2^{-k_0(p-2)/2} \leq C b_n^{p/2} a_n b_n^{-p/2} = C a_n.$$

On peut maintenant sommer sur $n \geq 0$, et on obtient

$$\sum_{n \geq n_0} \sum_{k} I_{n,k} \leq C \sum_{n \geq n_0} a_n, \tag{32}$$

où, dans la somme double, k satisfait à (28).

Supposons maintenant que $n < n_0$. Notons d'ailleurs que ce cas ne se produit que si z est assez petit. Cette fois, on note k_0 le plus petit entier vérifiant (29), et l'on somme (30) sur $k \geq k_0$. Il vient

$$\sum_{k \geq k_0} I_{n,k} \leq C b_n^{p/2} 2^{-k_0(p-2)/2} \leq C b_n^{p/2} b_n^{-(p-2)/2} |z|^{(p-2)/p} = C b_n |z|^{(p-2)/p}.$$

On somme sur $n < n_0$ sans difficulté, et on obtient moins que $C b_{n_0} |z|^{(p-2)/p}$. Compte tenu de (31), qui s'applique car $n \neq n_0$, $\sum \sum I_{n,k} \leq C a_{n_0}$, où la somme porte sur $n < n_0$ et k satisfaisant à (29). On regroupe avec (32):

$$\sum_{n} \sum_{k} I_{n,k} \leq C \sum_{n \geq n_0} a_n, \tag{33}$$

où la somme de gauche porte sur k et n tels que (28) et (29).

On étudie maintenant le cas où (28) est vraie, mais pas (29). Cette fois on utilise (25) (ou encore (24) si $E_{n,k}$ est encore plus petit qu'on croyait) et on obtient $I_{n,k} \leq C 2^k |z| \operatorname{Log}\left[C' b_n^p 2^{-kp} |z|^{-2}\right]$, où l'on peut (par exemple en augmentant brutalement la constante C') supposer que $C' \geq 400^p C^p$, où C est la constante qui intevient dans (29).

Comme (29) n'est pas satisfaite, l'expression entre crochets est supérieure à 100^p. Alors, quand on ajoute 1 à k, le Log diminue de $p \operatorname{Log} 2$, ce qui ne change sa valeur que de moins d'un tiers. Par contre, le facteur 2^k est multiplié par 2. Par conséquent, si k_0 est le plus grand entier tel que (29) soit fausse,

$$\sum_{k \leq k_0} I_{n,k} \leq C 2^{k_0} |z| \operatorname{Log}\left[C' b_n^p 2^{-k_0 p} |z|^{-2}\right] \leq C 2^{k_0} |z| \leq C b_n |z|^{(p-2)/p}.$$

Il s'agit maintenant de sommer sur les n tels que l'on puisse trouver des k satisfaisant à (28) mais pas à (29). Il faut bien sûr que

$$a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} \leq C b_n \left(4|z|^2\right)^{-1/p}, \quad \text{c-à-d.}$$

$$a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} \leq C|z|^{-2/p}.$$

Ceci ne peut se produire que si $|z| \leq C a_0^{p/(p-2)} b_0^{-p/(p-2)}$, c-à-d. pour $|z| \leq C C_0^{1/2}$.

Pour $C_0^{1/2} < |z| \leq C C_0^{1/2}$, alors $n \leq C$ et $b_n \leq C C_0^{1/p}$, d'où

$$\sum_{k \leq k_0} I_{n,k} \leq C C_0^{1/p} |z|^{(p-2)/p} \leq C C_0^{1/2} = C a_{n_0}.$$

Pour $|z| < C_0^{1/2}$, alors $n \leq n_0 + C$, et, grâce à (31),

$$\sum_{n \leq n_0 + C} \sum_{k \leq k_0} I_{n,k} \leq C \sum b_n |z|^{(p-2)/p} \leq C b_{n_0} |z|^{(p-2)/p} \leq C a_{n_0}.$$

Ainsi, $\sum_n \sum_k I_{n,k} \leq C a_{n_0}$, où n et k vérifient (28) mais pas (29); compte tenu de (33),

$$\sum_n \sum_k I_{n,k} \leq C \sum_{n \geq n_0} a_n,$$

où n et k vérifient (28). Supposons maintenant que (28) est fausse, c-à-d. que

(35) $$2^k < a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)}.$$

On utilisera maintenant (27) pour estimer $|E_{n,k}|$. On commence par le cas où $C a_n^2 2^{-2k} \leq 4|z|^2$, ce qui s'écrit

(36) $$2^k \geq C a_n |z|^{-1}.$$

Grâce à (24), $I_{n,k} \leq C 2^k a_n 2^{-k}$, c-à-d.

(37) $$I_{n,k} \leq C a_n.$$

On cherche maintenant à évaluer le nombre de k tels que (35) et (36) peuvent être satisfaites simultanément. On commence par le cas où $|z| \leq C_0^{1/2}$. Il faut que n soit tel que

$$C a_n |z|^{-1} \leq a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)},$$

c-à-d.

$$a_n^{-1} b_n \geq C^{(p-2)/p} \left(\frac{1}{|z|}\right)^{(p-2)/p},$$

ce qui ne peut se produire que si $n > n_0$ (car on peut choisir $C > 1$). Alors, le nombre de k tels que (35) et (36) soient vraies est inférieur à

$$1 + \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{C} a_n^{-p/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} |z|\right),$$

de sorte que la somme des $I_{n,k}$ est inférieure à

$$C a_n \operatorname{Log}\left(a_n^{-1} b_n |z|^{(p-2)/p}\right) \leq C a_n \operatorname{Log}\left(a_n^{-1} b_n a_{n_0} b_{n_0}^{-1}\right) \leq C a_n (n - n_0 + 1).$$

Par conséquent, si $|z| \leq C_0^{1/2}$, on a

$$\sum_n \sum_k I_{n,k} \leq C \sum_{n \geq n_0} a_n (n - n_0 + 1), \tag{38}$$

où n, k satisfont à (35) et (36).

Nous traiterons plus tard le cas un peu plus facile où $|z| > C_0^{1/2}$. En attendant, supposons que (35) est vraie, mais pas (36). On utilise (25) (ou (24) si par chance $|E_{n,k}| \leq 4|z|^2$) et il vient

$$I_{n,k} \leq C 2^k |z| \operatorname{Log}\left(C' a_n^2 2^{-2k} |z|^{-2}\right).$$

Quitte à augmenter C', on peut supposer que le fait que (36) est faux entraîne que le Logarithme est supérieur à 10. Alors, quand k augmente de 1, le Log ne change que de moins du $1/5$ de sa valeur, alors que le facteur 2^k est multiplié par 2. Ainsi, si k_0 est plus grand entier qui ne vérifie pas (36) mais vérifie (35), alors

$$\sum_{k \leq k_0} I_{n,k} \leq C 2^{k_0} |z| \operatorname{Log}(C' a_n^2 2^{-2k_0} |z|^{-2}). \tag{39}$$

Si $n < n_0$, on retient (35), ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq k_0} I_{n,k} &\leq C a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} |z| \operatorname{Log}\left(C' a_n^2 a_n^{4/(p-2)} b_n^{-2p/(p-2)} |z|^{-2}\right) \\ &\leq C a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} |z| \operatorname{Log}\left(C a_n b_n^{-1} |z|^{-(p-2)/p}\right) \\ &\leq C a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} |z| \operatorname{Log}\left(C a_n b_n^{-1} a_{n_0}^{-1} b_{n_0}\right) \end{aligned}$$

(car, comme $n_0 \neq 0, n_0$ est bien donné par (31))

$$\leq C a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} |z| \quad (n_0 - n + 1).$$

On somme sur $n < n_0$, et on obtient moins que

$$Ca_{n_0}^{-2/(p-2)} b_{n_0}^{p/(p-2)} |z| \leq C a_{n_0}^{-2/(p-2)} a_{n_0}^{p/(p-2)} = C a_{n_0}.$$

Ainsi,

$$\sum \sum_k I_{n,k} \leq C a_{n_0}, \tag{40}$$

où l'on somme sur $n < n_0$ et k vérifiant (35). Si $n \geq n_0$, on retient que (36) est fausse, ce qui donne

$$\sum_{k \leq k_0} I_{n,k} \leq C 2^{k_0} |z| \leq C a_n.$$

On somme sur $n \geq n_0$; compte tenu de (40), il vient

$$\sum_n \sum_k I_{n,k} \leq C \sum_{n \geq n_0} a_n, \tag{41}$$

où n, k vérifient (35) et pas (36). Compte tenu de (38) et (34) (et en se souvenant que (35) est la négation de (28)), on a montré que si $|z| \leq C_0^{1/2}$, alors

$$\sum_n \sum_k I_{n,k} \leq C \sum_{n \geq n_0} a_n (n - n_0 + 1)$$

et, compte tenu de (19),

$$\left| h^\mu(z) - z \right| \leq C \sum_{n \geq n_0} a_n (n - n_0 + 1). \tag{42}$$

Il nous faut encore étudier le cas où $|z| > C_0^{1/2}$, et où l'on a (35) et (36). On commence par le cas où

$$C a_n C_0^{-1/2} \leq 2^k < a_n^{-2/(p-2)} b_n^{p/(p-2)}. \tag{43}$$

Pour ces valeurs de k, on utilise encore (37); le nombre des k qui interviennent est $\leq C \operatorname{Log}(a_n^{-p/(p-2)} b_n^{p/(p-2)} C_0^{1/2}) + 1 \leq C(n+1)$. Par conséquent,

$$\sum_n \sum_k I_{n,k} \leq C \sum_{n \geq 0} (n+1) a_n,$$

où l'on somme sur n et k vérifiant (43).

Pour étudier le cas où

$$Ca_n|z|^{-1} \le 2^k \le Ca_n C_0^{-1/2}, \tag{44}$$

le mieux est d'utiliser, à la place de (27), l'inégalité

$$|\{z \in \mathbf{C};\ \mu(z) \neq 0\}| \le C_0, \tag{45}$$

qui donne, en appliquant (24), $I_{n,k} \le C2^k C_0^{1/2}$ et, en sommant sur k tel que (44), $\sum_k I_{n,k} \le Ca_n$. En sommant encore sur n, il vient

$$\sum_k \sum_n I_{n,k} \le C \sum_{n \ge 0} a_n,$$

où la somme porte sur k, n tels que (44). En comparant avec le résultat précédent, on voit qu'on a prouvé l'inégalité (38) qui nous manquait lorsque $|z| \ge C_0^{1/2}$; par conséquent, (42) est valable en toute généralité.

Il est temps d'estimer n_0. Bien entendu, on peut supposer que $C_0 > |z|^2$, car sinon $n_0 = 0$.

Lemme 5. *Le nombre n_0 défini par* (31) *vérifie*

$$n_0 \ge \frac{p-2}{2p \operatorname{Log} C_p} \operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2} - \frac{\gamma}{\operatorname{Log} C_p} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{p-2}{2p \operatorname{Log} C_p} \operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2}\right).$$

Appelons u le second membre. Il suffit de montrer que

$$C_0^{-1/2}(u+1)^\gamma C_0^{1/p} C_p^u \le \left(\frac{1}{|z|}\right)^{(p-2)/p}.$$

Le Logarithme du membre de gauche est

$$\begin{aligned}
&-\frac{p-2}{2p} \operatorname{Log} C_0 + \gamma \operatorname{Log}(u+1) + u \operatorname{Log} C_p \\
&\le -\frac{p-2}{2p} \operatorname{Log} C_0 + \gamma \operatorname{Log}\left(1 + \frac{p-2}{2p \operatorname{Log} C_p} \operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2}\right) + u \operatorname{Log} C_p \\
&= -\frac{p-2}{2p} \operatorname{Log} C_0 + \frac{p-2}{2p} \operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2} = \frac{p-2}{p} \operatorname{Log} \frac{1}{|z|}.
\end{aligned}$$

Le Lemme 5 en découle. On peut maintenant reporter u dans (42), ce qui donne

$$\begin{aligned}
|h^\mu(z) - z| &\le C \sum_{n \ge u} (n+1) a_n \le C C_0^{1/2} \sum_{n \ge u} (n+1)^{-\gamma+1} \le C C_0^{1/2} (u+1)^{-\gamma+2} \\
&\le C C_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2}\right)^{-\gamma+2} \\
&\quad \left(1 - C \operatorname{Log}\left(1 + \frac{p-2}{2p \operatorname{Log} C_p} \operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2}\right) \left(\operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2}\right)^{-1}\right)^{-\gamma+2} \\
&\le C C_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{C_0}{|z|^2}\right)^{-\gamma+2}
\end{aligned}$$

si $|z|$ est assez petit. Sinon, on majore simplement $\left|h^\mu(z) - z\right|$ par $CC_0^{1/2}$. Dans tous les cas, on a bien (12), et la Proposition 1 est démontrée.

Nous utiliserons au Paragraphe 7 la conséquence suivante de la preuve de la Proposition 1.

Lemme 6. *Soient μ_1 et $\mu_2 \in CL(\alpha, C_0, 1)$ pour un $\alpha > 3/m$ et soit $3 < \gamma < \alpha m$. Si l'on note h^{μ_1} et h^{μ_2} les homéomorphismes obtenus, comme dans la Proposition 1, à partir de μ_1 et μ_2, alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|h^{\mu_1}(z) - h^{\mu_2}(z)| \leq C(\alpha,\gamma) C_0^{1/2} \|\mu_1 - \mu_2\|_\infty \left(\mathrm{Log}(2 + C_0^{1/2}/|z|)\right)^{-\gamma+3}$.*

Pour prouver le lemme, considèrons les fonctions $f_n^i = T\mu_i T\mu_i \dots T\mu_i$ (n fois), pour $i = 1,\ 2$. Commençons par prouver deux estimations destinées à remplacer le Lemme 1:

Lemme 7. *Nous avons $\|f_n^1 - f_n^2\|_p^p \leq CC_0 C_p^{np}(n+1)^p \|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^p$ et $\|f_n^1 - f_n^2\|_2^2 \leq CC_0(n+1)^{-2\gamma+2} \|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^2$.*

Pour établir ce lemme, on écrit $f_n^1 - f_n^2 = T\mu_1 \dots T\mu_1 - T\mu_2 \dots T\mu_2 = \sum_{k=1}^n T\mu_1 \dots T\mu_1 T(\mu_1 - \mu_2) T\mu_2 \dots T\mu_2$, où $(\mu_1 - \mu_2)$ est à la $k$ième place, et l'on traite chacun des n termes séparément. On a bien sûr

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_p \leq CC_0^{1/p} \|\mu_1 - \mu_2\|_\infty ,$$

et par conséquent

$$\|T\mu_1 \cdots T\mu_1 T(\mu_1 - \mu_2)\|_p \leq CC_0^{1/p} C_p^n \|\mu_1 - \mu_2\|_\infty ;$$

l'estimation de la norme L^p des $(n-1)$ autres termes de la somme est encore plus facile.

Pour estimer $\|T\mu_1 \dots T\mu_1 T(\mu_1 - \mu_2) T\mu_2 \dots T\mu_2\|_2$, on procède comme pour le Lemme 1 (mais où f_n serait défini avec des μ_i différents), sauf qu'on remplace l'une des inégalités $\|f_k\|_2^2 \leq (1 - \beta/k)\|f_{k-1}\|_2^2 + CC_0 e^{-\eta k}$ du Lemme 3 par l'inégalité $\|T(\mu_1 - \mu_2) T\mu_2 \dots T\mu_2\|_2^2 \leq \|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^2 \|T\mu_2 \dots T\mu_2\|_2^2$. On obtient ainsi le Lemme 7.

On déduit le Lemme 6 du Lemme 7 comme pour prouver la Proposition 1; le fait qu'on ait perdu un facteur $(n+1)$ dans l'estimation de la norme L^2 est compensé par le fait qu'on a supposé que $\alpha > 3/m$.

3. Estimations sur $|h^\mu(E)|$ pour α assez grand et $\varepsilon_0 = 1$

On fait provisoirement l'hypothèse supplémentaire que $\|\mu\|_\infty < 1$ et que μ est à support compact. Alors h^μ est un homéomorphisme quasiconforme du plan. On garde par ailleurs les notations et les hypothèses de la Proposition 1.

Proposition 2. *Pour tout ensemble mesurable E,*

$$|h^\mu(E)| \leq C(\alpha,\gamma)C_0\left(\mathrm{Log}\left(2+\frac{C_0}{|E|}\right)\right)^{-2\gamma+2} + |E|.$$

Comme h est un homéomorphisme quasiconforme, on a, en notant $J(x,y)$ le Jacobien de h^μ en (x,y),

$$|h^\mu(E)| = \int_E J(x,y)\,dx\,dy = \int_E \left|\frac{\partial h^\mu}{\partial z}(x,y)\right|^2 (1-|\mu|^2(x,y))\,dx\,dy,$$

ce qui s'écrit encore, compte tenu de (11),

$$|h^\mu(E)| = \int_E |f+1|^2(1-|\mu|^2)\,dx\,dy = \left\|(f+1)\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E\right\|_2^2.$$

Il est donc raisonnable de chercher à estimer $\int_E |f_n|^2\,dx\,dy$. Nous utiliserons les inégalités

$$\int_E |f_n|^2 \leq CC_0(n+1)^{-2\gamma} \tag{46}$$

et

$$\int_E |f_n|^2 \leq CC_0^{2/p}C_p^{2n}|E|^{(p-2)/p}, \tag{47}$$

qui découlent respectivement du Lemme 1 et du Lemme 2. On utilisera de préférence (47) lorsque $C_0^{2/p}C_p^{2n}|E|^{(p-2)/p} \leq C_0(n+1)^{-2\gamma}$, c-à-d. lorsque

$$(n+1)^{2\gamma}C_p^{2n} \leq \left(\frac{C_0}{|E|}\right)^{(p-2)/p}. \tag{48}$$

Etant donné $|E|$, soit n_0 tel que

$$(n_0+1)^{2\gamma}C_p^{2n_0} = \left(\frac{C_0}{|E|}\right)^{(p-2)/p} \quad \text{si } \frac{C_0}{|E|} > 1, \quad n_0 = 1 \text{ sinon.} \tag{49}$$

Pour $n \geq n_0$, on utilise (46) et on obtient

$$\left(\int_E |f_n|^2\,dx\,dy\right)^{1/2} \leq CC_0^{1/2}(n+1)^{-\gamma}$$

et par conséquent

$$\sum_{n\geq n_0} \left\| f_n\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E \right\|_2 \leq CC_0^{1/2}(n_0+1)^{-\gamma+1}.$$

Pour $n < n_0$, on utilise (47) qui donne

$$\left\| f_n\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E \right\|_2 \leq CC_0^{1/p}C_p^n |E|^{(p-2)/2p} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n<n_0} \left\| f_n\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E \right\|_2 &\leq CC_0^{1/p}C_p^{n_0}|E|^{(p-2)/2p} \\ &\leq CC_0^{1/p}(n_0+1)^{-\gamma}\left(\frac{C_0}{|E|}\right)^{(p-2)/2p} |E|^{(p-2)/2p} \\ &\leq CC_0^{1/2}(n_0+1)^{-\gamma}.\end{aligned}$$

En regroupant, il vient

$$\left\| f\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E \right\|_2 \leq CC_0^{1/2}(n_0+1)^{-\gamma+1}.$$

On n'a pas manqué de noter la similitude entre (49) et (31), qui est encore plus frappante si l'on remarque que (31) s'écrit aussi

$$(n_0+1)^{2\gamma}C_p^{2n_0} = \left(\frac{C_0}{|z|^2}\right)^{(p-2)/p}.$$

Un lemme semblable au Lemme 5 permettrait de démontrer que

$$\left\| f\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E \right\|_2 \leq CC_0^{1/2}\left(\mathrm{Log}\left(2+\frac{C_0}{|E|}\right)\right)^{-\gamma+1}.$$

Bien entendu, on a aussi $\left\| \sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E \right\|_2 \leq |E|^{1/2}$, et la proposition en découle, puisque

$$|h^\mu(E)| = \left\| (f+1)\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E \right\|_2^2. \tag{50}$$

Corollaire. *On garde les mêmes hypothèses. Il existe une contante $C(\alpha)$ telle que*

$$|h^\mu(E)| \geq \frac{|E|}{2} \qquad \text{dès que} \qquad \frac{C_0}{|E|} \leq C(\alpha).$$

On utilise encore (50), qui entraîne

$$\left|h^\mu(E)\right|^{1/2} \geq |E|^{1/2} - \left\|\left(\sqrt{1-|\mu|^2}-1\right)\mathbf{1}_E\right\|_2 - \left\|f\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E\right\|_2 .$$

Comme $\left|\{z;\ \mu(z) \neq 0\}\right| \leq C_0$, $\left\|\sqrt{1-|\mu|^2}-1\right\|_2 \leq C_0^{1/2}$, et on a

$$\left\|\left(\sqrt{1-|\mu|^2}-1\right)\mathbf{1}_E\right\|_2 \leq |E|^{1/2}/8$$

dès que $C_0/|E| \leq 1/64$.

D'autre part,

$$\left\|f\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E\right\|_2 \leq C C_0^{1/2}\left(\mathrm{Log}\left(2+\frac{C_0}{|E|}\right)\right)^{-\gamma+1}$$

est inférieur à $|E|^{1/2}/8$ dès que $\left(C_0/|E|\right)^{1/2}\mathrm{Log}(2+C_0/|E|)^{-\gamma+1}$ est assez petit, ce qui se produit si $C_0/|E|$ est assez petit. Dans ce cas $\left|h^\mu(E)\right|^{1/2} \geq 3|E|^{1/2}/4$ et $\left|h^\mu(E)\right| \geq |E|/2$.

4. La décomposition $f_\mu = g \circ h_{\tilde{\mu}}$

Le but de ce paragraphe est de réduire l'étude de la solution f_μ de l'équation (3) à celle des h^μ du Paragraphe 2. L'idée est d'écrire $f_\mu = g \circ h_{\tilde{\mu}}$, où g est K-quasiconforme et $h_{\tilde{\mu}}$ est la solution de (3) associée à un $\tilde{\mu} \in CL(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_0, 1)$ pour un $\tilde{\alpha} > 2/m$. Pour le moment, nous supposerons que $\|\mu\|_\infty < 1$ et μ est à support compact et nous nous contenterons d'estimations a priori.

Proposition 3. *Soit μ à support compact et telle que $\|\mu\|_\infty < 1$. On note f_μ la solution de $\partial f/\partial \bar{z} = \mu(\partial f/\partial z)$ normalisée par $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(\infty) = \infty$.*

On suppose que $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ et on se donne $K > 1$. Alors on peut écrire $f_\mu = g \circ h_{\tilde{\mu}}$, où g est un homéomorphisme K-quasiconforme du plan fixant 0, 1, ∞, et où $h_{\tilde{\mu}}$ est quasiconforme avec une dilatation $\tilde{\mu}$ à support compact et telle que $\tilde{\mu} \in CL(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_0, \tilde{\varepsilon}_0)$, avec

$$\tilde{\alpha} = \alpha K, \tag{51}$$

$$\tilde{C}_0 = C_0 \exp -\alpha(K-1)/2 \tag{52}$$

et

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \min\left(1, \frac{2\varepsilon_0 K}{2+\varepsilon_0(K-1)}\right). \tag{53}$$

Corollaire. *En particulier, si*

$$K+1 \geq 2/\varepsilon_0 \tag{54}$$

et

$$\alpha K > 2/m, \tag{55}$$

alors

$$h_{\tilde{\mu}} = \frac{1}{h^{\tilde{\mu}}(1)} h^{\tilde{\mu}},$$

où $h^{\tilde{\mu}}$ est associé à $\tilde{\mu}$ comme pour la Proposition 1.

Le corollaire est immédiat, puisque $K+1 \geq 2/\varepsilon_0$ entraîne

$$\frac{2\varepsilon_0 K}{2+\varepsilon_0(K-1)} \geq \frac{2\varepsilon_0\left(\frac{2}{\varepsilon_0}-1\right)}{2+\varepsilon_0\left(\frac{2}{\varepsilon_0}-2\right)} = \frac{4-2\varepsilon_0}{4-2\varepsilon_0} = 1.$$

Pour démontrer la proposition, nous allons choisir $\tilde{\mu}$, ce qui déterminera $h_{\tilde{\mu}}$ et donc g. Il faudra vérifier que g est K-quasiconforme et que $\tilde{\mu} \in CL(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_0, \tilde{\varepsilon_0})$.

On décide que, en notant $\varepsilon(z) = 1 - |\mu(z)|$,

$$\tilde{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z)(2-\varepsilon(z)(K+1))/|\mu(z)|(2+\varepsilon(z)(K-1)) & \text{pour } \varepsilon(z) < 2/(K+1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(ce choix n'a rien de mystérieux: on veut que la dilatation de g, calculée plus bas, soit aussi proche de μ que possible, tout en restant $\leq (K-1)/(K+1)$).

Bien sûr, $\|\tilde{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty < 1$ et le support de $\tilde{\mu}$ est contenu dans celui de μ. L'homéomorphisme $h_{\tilde{\mu}}$ défini à l'aide de $\tilde{\mu}$ est quasiconforme, et $g = f_\mu \circ h_{\tilde{\mu}}^{-1}$ est aussi quasiconforme, ce qui permet de calculer sa dilatation μ_g à l'aide de la formule habituelle (voir p. ex. [LV], 4.5.2):

$$|\mu_g(h_{\tilde{\mu}}(z))| = \frac{|\mu(z)-\tilde{\mu}(z)|}{|1-\overline{\tilde{\mu}}(z)\mu(z)|} \qquad \text{presque-partout.}$$

Pour prouver que $|\mu_g| \leq (K-1)/(K+1)$ preque-partout, oublions un instant le paramètre z et remplaçons $\tilde{\mu}$ par sa valeur, en commençant par le cas où $\varepsilon < 2/(K+1)$. On obtient

$$\begin{aligned}
&|\mu|\left(1-\frac{1}{|\mu|}\frac{2-\varepsilon(K+1)}{2+\varepsilon(K-1)}\right)\left(1-|\mu|\frac{2-\varepsilon(K+1)}{2+\varepsilon(K-1)}\right)^{-1}\\
&\quad=\left((1-\varepsilon)-\frac{2-\varepsilon(K+1)}{2+\varepsilon(K-1)}\right)\left(1-(1-\varepsilon)\frac{2-\varepsilon(K+1)}{2+\varepsilon(K-1)}\right)^{-1}\\
&\quad=\big((1-\varepsilon)(2+\varepsilon(K-1))-2+\varepsilon(K+1)\big)\cdot\\
&\qquad\cdot\big(2+\varepsilon(K-1)-(1-\varepsilon)(2-\varepsilon(K+1))\big)^{-1}\\
&\quad=\big(2+\varepsilon(K-1)-2\varepsilon-\varepsilon^2(K-1)-2+\varepsilon(K+1)\big)\cdot\\
&\qquad\cdot\big(2+\varepsilon(K-1)-2+\varepsilon(K+1)+2\varepsilon-\varepsilon^2(K+1)\big)^{-1}\\
&\quad=\big(2\varepsilon K-2\varepsilon-\varepsilon^2(K-1)\big)\big(2\varepsilon K+2\varepsilon-\varepsilon^2(K+1)\big)^{-1}\\
&\quad=(2\varepsilon-\varepsilon^2)(K-1)(2\varepsilon-\varepsilon^2)^{-1}(K+1)^{-1}=\frac{K-1}{K+1}.
\end{aligned}$$

Donc, dans le cas où $\varepsilon(z)<2/(K+1)$, on a $|\mu_g(h_\mu(z))|=(K-1)/(K+1)$. Dans le cas où $\varepsilon(z)\geq 2/(K+1)$, alors $|\mu_g(h_\mu(z))|=|\mu(z)|=1-\varepsilon(z)\leq 1-2/(K+1)=(K-1)/(K+1)$. Ainsi, $\|\mu_g\|_\infty\leq(K-1)/(K+1)$, ce qui signifie bien que g est K-quasiconforme.

Il nous reste à vérifier que $\tilde{\mu}\in CL(\tilde{\alpha},\tilde{C}_0,\tilde{\varepsilon_0})$. On se donne donc $\tilde{\varepsilon}\leq\tilde{\varepsilon}_0$, et on cherche à savoir pour quels z on a $|\tilde{\mu}(z)|>1-\tilde{\varepsilon}$.

Notons que si $\tilde{\mu}(z)\neq 0$, alors $|\tilde{\mu}(z)|=\big(2-\varepsilon(z)(K+1)\big)/\big(2+\varepsilon(z)(K-1)\big)$, de sorte que l'inégalité $|\tilde{\mu}(z)|>1-\tilde{\varepsilon}$ s'écrit aussi $2-\varepsilon(z)(K+1)>(1-\tilde{\varepsilon})\big(2+\varepsilon(z)(K-1)\big)$, ou encore $2\tilde{\varepsilon}>2\varepsilon(z)K-\tilde{\varepsilon}\varepsilon(z)(K-1)$, soit $\varepsilon(z)<2\tilde{\varepsilon}/(2K-\tilde{\varepsilon}(K-1))$. Comme $\tilde{\varepsilon}\leq\tilde{\varepsilon}_0$, le nombre $\varepsilon=2\tilde{\varepsilon}/\big(2K-\tilde{\varepsilon}(K-1)\big)$ vérifie

$$\varepsilon\leq\frac{2\tilde{\varepsilon}_0}{2K-\tilde{\varepsilon}_0(K-1)}\leq\frac{4\varepsilon_0K}{2+\varepsilon_0(K-1)}\frac{2+\varepsilon_0(K-1)}{2K(2+\varepsilon_0(K-1))-2\varepsilon_0K(K-1)}=\varepsilon_0.$$

Donc on peut utiliser (1), et

$$\begin{aligned}
\big|\{z\colon|\tilde{\mu}(z)|>1-\tilde{\varepsilon}\}\big|&\leq C_0e^\alpha\exp-\alpha\big(2K-\tilde{\varepsilon}(K-1)\big)/2\tilde{\varepsilon}\\
&\leq C_0e^\alpha e^{\alpha(K-1)/2}e^{-\alpha K/\tilde{\varepsilon}}=\tilde{C}_0e^{\alpha K}e^{-\alpha K/\tilde{\varepsilon}},
\end{aligned}$$

où $\tilde{C}_0=C_0(\exp\alpha)(\exp\alpha(K-1)/2)(\exp-\alpha K)=C_0\exp-\alpha(K-1)/2$ comme promis.

5. Quelques estimations sur les applications quasiconformes

Si nous voulons utiliser les informations sur $h^{\tilde{\mu}}$ qu'on a trouvées aux Paragraphes 2 et 3, il sera utile de préciser un peu les propriétés de g. Les résultats présentés dans ce paragraphe relèvent de la théorie standard des homéomorphismes quasiconformes, et c'est pourquoi nous nous contenterons parfois de démonstrations assez évasives.

Lemme 8. *Il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $M \geq 2$, tout $K \geq 1$, tout homéomorphisme K-quasiconforme g fixant 0, 1, ∞ et tous $z, z' \in D(0,M)$ tels que $|z'-z| \leq 10$, on ait*

$$|g(z') - g(z)| \leq C^K M^K |z'-z|^{1/K} \tag{56}$$

et

$$|g(z') - g(z)| \geq C^{-K} M^{-K} |z'-z|^K. \tag{57}$$

Pour démontrer le lemme, on peut commencer par prouver que $C^{-K}|z|^K \leq |g(z)|$ pour $|z| < 1/10$, ce que l'on peut faire en remarquant que, quand z est petit, la distance extrêmale entre deux chemins raisonnables, l'un joignant 0 et z, et l'autre 1 et ∞, est comprise entre $(1/C)\operatorname{Log}(1/|z|)$ et $C\operatorname{Log}(1/|z|)$, et en utilisant le fait que g multiplie les distances extrêmales par moins de K (voir [LV], 2.2.4).

On peut, étant donné z tel que $|z| > 10$, appliquer cette inégalité à la fonction $\tilde{g}(u) = g(uz)/g(z)$ (qui fixe aussi 0 et 1) au point $u = 1/z$. Il vient $C^{-K}|z|^{-K} \leq |\tilde{g}(1/z)|$, c-à-d. $C^{-K}|z|^{-K}|g(z)| \leq |g(1)| = 1$ donc $|g(z)| \leq C^K|z|^K$ pour $|z| > 10$.

On peut aussi appliquer l'inégalité $C^{-K}|z|^K \leq |g(z)|$ à g^{-1}, ce qui donne $|g(z)| \leq C|z|^{1/K}$ dès que $|z| \leq C^{-K}$. Comme $|g(z)| \leq C^K 10^K$ pour $|z| = 10$ il vient $|g(z)| \leq C^K|z|^{1/K}$ pour $|z| \leq 10$. De même, quitte à augmenter encore C, on a $|g(z)| \geq C^{-K}|z|^K$ pour tout $z \in D(0,1)$. On se donne maintenant z et z' comme dans le lemme. Quitte à échanger z et z' ou 0 et 1, on peut supposer que $|z'| \leq |z|$ et $|z| \geq 1/2$. On considère encore la fonction $\tilde{g}(u) = g(uz)/g(z)$ au point $u = z'/z$. Comme $|u-1| \leq 10$, il vient $C^{-K}|u-1|^K \leq |\tilde{g}(u) - \tilde{g}(1)| \leq C^K|u-1|^{1/K}$, c-à-d.

$$C^{-K}\frac{|z'-z|^K}{|z|^K} \leq \frac{1}{|g(z)|}|g(z') - g(z)| \leq C^K \frac{|z'-z|^{1/K}}{|z|^{1/K}}.$$

Comme $|z| \leq M$, on a $|g(z)| \leq C^K M^K$, et, puisque $|z| \geq 1/2$, $|g(z)| \geq C^{-K}$. Par conséquent,

$$C^{-2K}M^{-K}|z'-z|^K \leq |g(z') - g(z)| \leq C^{2K}M^K|z'-z|^{1/K},$$

comme on le désirait.

Lemme 9. *Il existe deux constantes A et $B > 1$ telles que, pour $K \geq 1$, $M \geq 2$ et tout homéomorphisme K-quasiconforme g du plan fixant 0, 1 et ∞, on ait*

$$|g(E)| \leq M^{BK}|E|^{1/AK} \tag{58}$$

et

$$|g(E)| \geq (KM)^{-BK}|E|^{AK} \quad \textit{pour tout ensemble } E \textit{ dans } \ D(0,M). \tag{59}$$

On peut commencer par démontrer ce lemme (voir aussi [LV], 5.5.3, 5.5.5) dans le cas particulier où $M = 2$ et où g a sa dilatation supportée dans $D(0,R)$ pour un R fixé assez grand ($R = 10$ suffira). On étudie d'abord $\tilde{g}$, la solution de l'équation de Beltrami normalisée par $(\partial\tilde{g}/\partial z) - 1 \in L^p$ pour un $p > 2$. On choisit en fait p de la forme $2 + 1/CK$; si C est assez grand, la norme de μT sur L^p (où μ est la dilatation de g et de $\tilde{g}$) est inférieure à $1 - C'/K$ (en effet, $\operatorname{Log} C_p$ est une fonction convexe de $1/p$, voir [S]). Alors $\|(\partial\tilde{g}/\partial z) - 1\|_{L^p} \leq CK\,\|\mu\|_{L^p} \leq CK$. On majore $|\tilde{g}(E)| = \int_E |\partial\tilde{g}/\partial z|^2(1 - |\mu|^2)$ par $\|\mathbf{1}_E\|_{L^q}\,\big\||\partial\tilde{g}/\partial z|^2(1 - |\mu|^2)\mathbf{1}_E\big\|_{L^{q'}}$, où $q = p/(p-2)$ et $q' = p/2$ (de sorte que $(1/q) + (1/q') = 1$). Alors

$$|\tilde{g}(E)| \leq C|E|^{(p-2)/p}\left\|\frac{\partial\tilde{g}}{\partial z} - 1\right\|_{L^p}^2 + C|E|^{(p-2)/p}\|\mathbf{1}_E\|_{L^{q'}} \leq C|E|^{(p-2)/p}K^2 + C|E|$$

et, compte tenu du choix de p,

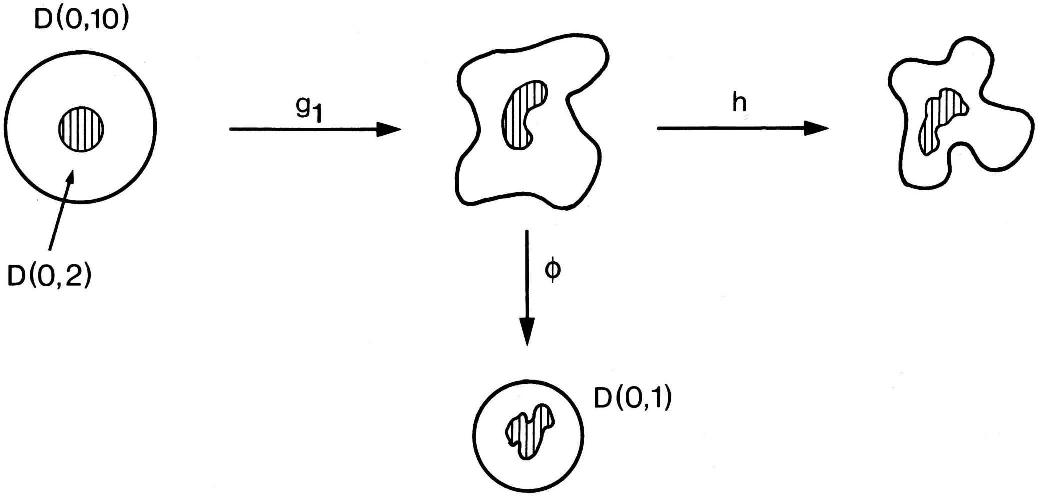
$$|\tilde{g}(E)| \leq CK^2|E|^{1/AK} + C|E| \tag{60}$$

pour un certain $A > 0$.

On veut encore évaluer $\tilde{g}(1)$. On commence par noter que $\big(\tilde{g}(1/z)\big)^{-1}$ a une singularité artificielle en 0, et est en fait conforme au voisinage de 0, avec une dérivée égale à 1 en 0. Le théorème de Koebe nous dit que $\tilde{g}\big(D(0,R)\big) \subset D(0,4R)$. Alors, la dilatation de $\tilde{g}^{-1}$ est nulle hors de $D(0,4R)$. On vérifie que $\tilde{g}^{-1}$ est aussi normalisée par $\tilde{g}^{-1}(0) = 0$ et $\partial\tilde{g}^{-1}/\partial z - 1 \in L^p$, et on en déduit que $|E| \leq CK^2|\tilde{g}(E)|^{1/AK} + C|\tilde{g}(E)|$, et que $\tilde{g}^{-1}\big(D(0,4R)\big) \subset D(0,16R)$, c-à-d. que $\tilde{g}\big(D(0,16R)\big) \supset D(0,4R)$.

Pour $E \subset D(0,2)$, on a bien $\tilde{g}(E) \leq CK^2|E|^{1/AK}$ grâce à (60). De plus, $|\tilde{g}(E)| \leq |D(0,4R)|$ et par conséquent $|E| \leq CK^2|\tilde{g}(E)|^{1/AK}$, c-à-d., $|\tilde{g}(E)| \geq C^{-K}K^{-2AK}|E|^{AK}$. Enfin, $|\tilde{g}(1)| \leq 4R$ puisque $1 \in D(0,R)$ et $|\tilde{g}(1)| \geq C^{-K}$ puisque $\tilde{g}\big(D(0,16R)\big) \supset D(0,4R)$. On a donc montré que

$$C^{-K}K^{-2AK}|E|^{AK} \leq |g(E)| \leq C^K|E|^{1/AK} \tag{61}$$



dès que $E \subset D(0,2)$ et $\partial g/\partial \bar{z}$ est à support dans $D(0,10)$.

Dans le cas où g est quelconque, on peut écrire $g = h \circ g_1$ où h et g_1 sont K-quasiconformes, $\partial g_1/\partial \bar{z}$ est supporté dans $D(0,10)$ et h est conforme sur $g_1(D(0,10))$.

Soit ϕ une représentation conforme: $g_1(D(0,10)) \to D(0,1)$ fixant 0. Alors $\phi \circ g_1$ est K-quasiconforme. Soit d la distance de $\phi \circ g_1(D(0,2))$ au cercle unité, et soient $z_1 \in \phi \circ g_1\overline{(D(0,2))}$ et z_2 (tel que $|z_2| = 1$) deux points qui réalisent cette distance. Le théorème de Mori, appliqué à $(\phi \circ g_1)^{-1}/10$, donne

$$\frac{1}{10}\left|(\phi \circ g_1)^{-1}(z_1) - (\phi \circ g_1)^{-1}(z_2)\right| \leq 16 d^{1/K},$$

ce qui prouve que

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{10}\operatorname{dist}\big(D(0,2), \{z\,;|z| = 10\}\big) \leq 16 d^{1/K},$$

d'où $d \geq (20)^{-K}$.

Comme $h \circ \phi^{-1}$ est conforme sur $D(0,1)$, on peut appliquer le théorème de Koebe à $h \circ \phi^{-1}$ et à ϕ^{-1}; on en déduit que

$$\begin{aligned} C^{-K} \sup_{x \in g_1(D(0,2))} |h'(x)| &\leq \left|\big(g(1) - g(0)\big)\big(g_1(1) - g_1(0)\big)^{-1}\right| \\ &\leq C^K \inf_{x \in g_1(D(0,2))} |h'(x)|. \end{aligned}$$

Comme $g(1) - g(0) = g_1(1) - g_1(0) = 1$, on déduit de ceci et de (61) que

$$C^{-K}K^{-2AK}|E|^{AK} \leq \left|g(E)\right| \leq C^K|E|^{1/AK}$$

pour $E \subset D(0,2)$ et tout g.

Dans le cas où $E \subset D(0,M)$ pour un $M > 2$, on choisit un point z_0 tel que $|z_0| = M/2$ et on considère la fonction $\tilde{g}(u) = g(uz_0)/g(z_0)$. Comme $\tilde{g}$ fixe aussi 0 et 1, et comme $\tilde{E} = z_0^{-1}E \subset D(0,2)$, on a

$$C^{-K}K^{-2AK}|\tilde{E}|^{AK} \leq \left|\tilde{g}(\tilde{E})\right| \leq C^K|\tilde{E}|^{1/AK}$$

c-à-d.

$$C^{-K}K^{-2AK}M^{-2AK}|E|^{AK} \leq \frac{1}{\left|g(z_0)\right|^2}\left|g(E)\right| \leq C^K M^2|E|^{1/AK},$$

d'où l'on déduit (58) et (59) après estimation de $\left|g(z_0)\right|$.

6. Estimations a priori

Le but de ce paragraphe est de prouver les inégalités (4), (5), (6) et (7) lorsque $\|\mu\|_\infty < 1$ et μ est à support compact. Commençons par quelques conséquences faciles de la Proposition 1.

Lemme 10. *Soient $\alpha, \gamma, C_0, \mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$ et h^μ comme dans la Proposition 1. On suppose de plus que $\|\mu\|_\infty < 1$ et que μ est à support compact. Alors, pour $z, z' \in \mathbf{C}$,*

$$(60) \qquad \left|h^\mu(z') - h^\mu(z)\right| \leq |z' - z| + C(\alpha,\gamma)C_0^{1/2}\left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{C_0^{1/2}}{|z'-z|}\right)\right)^{-\gamma+2}.$$

En effet, si z' est fixé, et si $H(z - z') = h^\mu(z) - h^\mu(z')$, alors H est la solution de

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}(u) = \mu(u + z')\frac{\partial H}{\partial z}(u)$$

normalisée par $H(0) = 0$ et $\partial H/\partial z - 1 \in L^p$ pour un $p > 2$. On peut appliquer la Proposition 1 à $\mu(u + z') \in CL(\alpha, C_0, 1)$; on en déduit le lemme, car (62) n'est autre que (12) appliqué à H.

Lemme 11. *Soient encore α, μ, C_0 et h^μ comme dans la Proposition 1, avec l'hypothèse supplémentaire que μ est à support compact et $\|\mu\|_\infty < 1$. Alors, si $C_0 \leq \nu(\alpha)|z' - z|^2$, où $\nu(\alpha)$ est une constante strictement positive qui ne dépend ni de μ ni de C_0,*

$$(63) \qquad \left|h^\mu(z) - h^\mu(z')\right| \geq \tfrac{1}{2}|z' - z|.$$

Par le même argument que pour le Lemme 10, on peut se contenter de montrer (63) lorsque $z' = 0$. Choisissons un γ (ne dépendant que de α) tel que $2 < \gamma < \alpha m$, et appliquons la Proposition 1. Si $z' = 0$, (63) sera satisfait dès que

$$C(\alpha,\gamma)C_0^{1/2}\left(\operatorname{Log}\left(2+\frac{C_0^{1/2}}{|z|}\right)\right)^{-\gamma+2} \le \tfrac{1}{2}|z|$$

(en gardant les notations de la Proposition 1). Cela s'écrit $u\big(\operatorname{Log}(2+u)\big)^{-\gamma+2} \le 1/C(\alpha,\gamma)$, où $u = C_0^{1/2}/|z|$, et cela se produit dès que u est assez petit.

Pour poursuivre nos estimations, nous utiliserons la décomposition $f_\mu = g \circ h_{\tilde{\mu}}$ du Paragraphe 4, où K sera choisi en fonction de nos besoins.

Notons d'abord que si K est tel que

$$\text{(64)} \qquad \begin{cases} \alpha K \ge 2/m + 1, \\ C_0 \exp -\frac{1}{2}\alpha(K-1) \le \nu(2/m+1) \quad \text{et} \\ K + 1 \ge 2/\varepsilon_0, \end{cases}$$

alors on peut appliquer le Corollaire de la Proposition 3, et de plus $1/2 \le \left|h^{\tilde{\mu}}(1)\right| \le 3/2$ grâce à la démonstration du Lemme 11.

Pour prouver (4), on applique le Lemme 10 à $h^{\tilde{\mu}}$, où $\tilde{\mu}$ est donné par la Proposition 3, et où K a été choisi tel que (64) soit vérifiée. Il vient, pour $2 < \gamma < \tilde{\alpha} m = \alpha K m$,

$$\begin{aligned} \left|h^{\tilde{\mu}}(z') - h^{\tilde{\mu}}(z)\right| &\le |z'-z| + C(\tilde{\alpha},\gamma)\tilde{C}_0^{1/2}\left(\operatorname{Log}\left(2+\frac{\tilde{C}_0^{1/2}}{|z'-z|}\right)\right)^{-\gamma+2} \\ &\le C\left(\operatorname{Log}\left(2+\frac{1}{|z'-z|}\right)\right)^{-\gamma+2} \end{aligned}$$

dès que $|z'-z| \le 1$ (on ne note plus la dépendance de C en α, C_0, K). On en déduit aussitôt que

$$\left|h_{\tilde{\mu}}(z') - h_{\tilde{\mu}}(z)\right| \le C\left(\operatorname{Log}\left(2+\frac{1}{|z'-z|}\right)\right)^{-\gamma+2}.$$

Notons que, lorsque (64) est vérifiée, on a $\left|h^{\tilde{\mu}}(z) - z\right| \le 1$ grâce à la Proposition 1, appliquée à $\tilde{\mu} \in CL(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_0, 1)$. Donc, si z et z' sont dans $D(0,M)$, alors $h_{\tilde{\mu}}(z)$ et $h_{\tilde{\mu}}(z')$ sont dans $D(0,3M)$. Si de plus $|z'-z| \le 1$, alors

$$\left|h_{\tilde{\mu}}(z) - h_{\tilde{\mu}}(z')\right| \le \frac{9}{10} < 10.$$

On peut donc utiliser le Lemme 8, qui donne

$$\begin{aligned}\left|f_\mu(z') - f_\mu(z)\right| &\le C^K M^K \left|h_{\tilde\mu}(z') - h_{\tilde\mu}(z)\right|^{1/K} \\ &\le C^K M^K \left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{1}{|z'-z|}\right)\right)^{(-\gamma+2)/K}\end{aligned}$$

dès que $|z' - z| \le 1$.

On choisit maintenant K assez grand pour que, en plus de (64), on ait $\alpha m K - 3 > \delta K$ (ce qui est possible parce que $\delta < m\alpha$) et on prend $\gamma = \alpha m K - 1$. (Notons que l'on a bien $2 < \gamma < \alpha m K$.) On a montré que $\left|f_\mu(z') - f_\mu(z)\right| \le C\bigl(\operatorname{Log}(2 + 1/|z'-z|)\bigr)^{-\delta}$, où la constante C dépend bien de $\alpha, \delta, M, C_0, \varepsilon_0$ et de K et γ (qui dépendent de paramètres précédents). C'est bien l'inégalité (4), que nous venons de prouver quand $|z' - z| \le 1$. Le cas général s'en déduit aussitôt.

La démonstration de (6) est tout-à-fait semblable. On suppose toujours que K vérifie (64), et on commence par appliquer la Proposition 2 à un ensemble mesurable $E \subset D(0, M)$:

$$\begin{aligned}\left|h^{\tilde\mu}(E)\right| &\le C\left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{1}{|E|}\right)\right)^{-2\gamma+2} + |E| \\ &\le C\left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{1}{|E|}\right)\right)^{-2\gamma+2}.\end{aligned}$$

Comme $\left|h_{\tilde\mu}(E)\right| \le 4\left|h^{\tilde\mu}(E)\right|$ et comme $h_{\tilde\mu}(E) \subset D(0, 3M)$, une application du Lemme 9 donne

$$\left|f_\mu(E)\right| \le M^{BK}\left|h^{\tilde\mu}(E)\right|^{1/AK} \le C\left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{1}{|E|}\right)\right)^{-(2\gamma-2)/AK}.$$

Supposons que $\varrho < 2\alpha m/A$ (ce qui correspond à la condition du théorème avec $\theta = 2m/A$), et choisissons K assez grand pour que $(2\alpha m/A) - (4/AK) > \varrho$, et $\gamma = m\alpha K - 1$. Il vient

$$\left|f_\mu(E)\right| \le C\left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{1}{|E|}\right)\right)^{-(2\alpha m/A)+(4/AK)} \le C\left(\operatorname{Log}\left(2 + \frac{1}{|E|}\right)\right)^{-\varrho},$$

ce qui démontre (6).

Passons maintenant à la démonstration de (5). Cette fois, K dépendra de $|z'-z|$. En fait, on choisit K tel que $\tilde C_0 = C_0 \exp -\frac{1}{2}\alpha(K-1) \le \nu(2/m+1)|z'-z|^2$, et aussi tel que (64) soit vérifiée (ce qui sera automatique si $|z'-z|$ est assez petit). On peut appliquer le Lemme 11 avec $\alpha' = 2/m + 1$, puisque $\tilde\mu \in CL(\alpha K, \tilde C_0, 1) \subset CL(2/m + 1, \tilde C_0, 1)$. On obtient

$$\left|h_{\tilde\mu}(z) - h_{\tilde\mu}(z')\right| \ge \tfrac{1}{2}\left|h^{\tilde\mu}(z) - h^{\tilde\mu}(z')\right| \ge \tfrac{1}{4}|z' - z|$$

et, grâce au Lemme 8,

$$\left|f_\mu(z)-f_\mu(z')\right| \geq C^{-K}M^{-K}|z'-z|^K.$$

Il faut encore estimer K. Si $|z'-z|$ est assez petit, on peut choisir K tel que $C_0 \exp -\alpha(K-1)/2 = \nu(2/m+1)|z'-z|^2$, c-à-d. tel que $\frac{1}{2}\alpha(K-1) = \mathrm{Log}\big(C_0/\nu(2/m+1)|z'-z|^2\big)$, ou encore $K = 1+(2/\alpha)\,\mathrm{Log}\big(C_0/\nu(2/m+1)|z'-z|^2\big)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\left|f_\mu(z)-f_\mu(z')\right| &\geq -K\left(C+\mathrm{Log}\frac{1}{|z'-z|}\right)\\
&\geq -\left(1+\frac{2}{\alpha}\mathrm{Log}\frac{C_0}{\nu(2/m+1)|z'-z|^2}\right)\left(C+\mathrm{Log}\frac{1}{|z'-z|}\right)\\
&\geq -\frac{4}{\alpha}\left(\mathrm{Log}\frac{1}{|z'-z|}\right)^2 - C\,\mathrm{Log}\frac{1}{|z'-z|} - C,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (5) lorsque $|z'-z|$ est assez petit.

Lorsque $|z'-z|$ n'est pas petit, on choisit simplement K tel que (64) soit vérifiée, et on obtient $\left|f_\mu(z')-f_\mu(z)\right| > 1/C$, ce qui est suffisant pour conclure.

Pour prouver (7), on choisit K assez grand pour que l'on ait (64), et pour que

$$\frac{\tilde{C}_0}{|E|} = \frac{C_0}{|E|}e^{-\alpha(K-1)/2} \leq C\left(\frac{2}{m}+1\right)$$

avec les notations du Corollaire du Paragraphe 3. Alors $\left|h^{\tilde{\mu}}(E)\right| \geq |E|/2$, d'où on déduit $\left|h_{\tilde{\mu}}(E)\right| \geq |E|/8$ et, en appliquant le Lemme 9,

$$\left|f_\mu(E)\right| \geq C^{-1}(KM)^{-BK}|E|^{AK}.$$

Si $|E|$ est assez petit, on choisit K tel que $\exp -\frac{1}{2}\alpha(K-1) = |E|C(2/m+1)$ $/C_0$, c-à-d.

$$K = 1+\frac{2}{\alpha}\mathrm{Log}\frac{C_0}{|E|C(2/m+1)}.$$

Cela donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\left|f_\mu(E)\right| &\geq -C-\left(1+\frac{2}{\alpha}\mathrm{Log}\frac{C_0}{|E|C(2/m+1)}\right)\left(C+B\,\mathrm{Log}\,K+A\,\mathrm{Log}\frac{1}{|E|}\right)\\
&\geq -\left(\frac{2A}{\alpha}\left(\mathrm{Log}\frac{1}{|E|}\right)^2 + C\,\mathrm{Log}\frac{1}{|E|}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\frac{1}{|E|}+C\right)\\
&\geq -C\left(\mathrm{Log}\frac{1}{|E|}\right)^2 - C,
\end{aligned}$$

d'où on déduit (7).

Il ne reste plus, pour finir la démonstration du Théorème 1, qu'à passer à la limite dans de bonnes conditions. C'est ce que nous ferons dans le prochain paragraphe.

7. Passage à la limite

Voyons d'abord comment la fonction h^μ du Paragraphe 1 dépend de μ: le Lemme 6 nous dit que, si $\mu_1 \to \mu_2$ dans L^∞ tout en restant dans $CL(\alpha, C_0, 1)$ pour un $\alpha > 3/m$, la fonction h^{μ_1} tend vers h^{μ_2} uniformément sur le plan complexe. On a aussi convergence dans L^2 de $f^1 = \sum_{n=1}^\infty f_n^1$ vers $f^2 = \sum_{n=1}^\infty f_n^2$ grâce au Lemme 7.

Soient $\mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$ et μ_k une suite de fonctions de $CL(\alpha, C_0, 1)$ telles que $\|\mu_k\|_\infty < 1$ et $\|\mu_k\|_2 < +\infty$ pour chaque k et telles que $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \mu$ dans L^∞. Pour chaque k, notons h^k la solution de $\partial h^k/\partial \bar{z} = \mu_k \partial h^k/\partial z$ normalisée par $h^k(0) = 0$ et $\partial h^k/\partial z - 1 \in L^p$ pour un $p > 2$. Si $f^k = \sum_{n=1}^\infty f_n^k = \sum_{n=1}^\infty T\mu_k \ldots T\mu_k$, alors $\partial h^k/\partial z = f^k + 1$ et $\partial h^k/\partial \bar{z} = \mu_k(f^k + 1)$ (on n'a pas besoin pour cela que μ soit à support compact, mais seulement que μ soit dans L^p; une modification mineure de l'argument que nous donnons permettrait d'ailleurs de le montrer).

Soit φ une fonction test. Alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} h^\mu &= \lim_{k\to\infty} \int \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} h^k \quad \text{(par convergence des } h^k\text{)} \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int \varphi \frac{\partial h^k}{\partial \bar{z}} = -\lim_{k\to\infty} \int \varphi(1 + f^k)\mu_k \\
&= -\int \varphi(1 + f)\mu \quad \text{(par convergence dans } L^2 \text{ des } f^k\text{)}.
\end{aligned}$$

Donc $\partial h^\mu/\partial \bar{z} = \mu(f + 1)$ au sens des distributions, et de même $\partial h^\mu/\partial z = f + 1$. Nous savons maintenant que la fonction h^μ du Paragraphe 2 a des dérivées partielles dans L^2_{loc}, et est solution de l'équation de Beltrami. Nous démontrerons que h^μ est un homéomorphisme en même temps que nous ferons pour f_μ.

Dans le cas général où $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$, nous allons obtenir f_μ d'une manière un peu plus détournée.

Donnons-nous une suite μ_n de fonctions bornées, avec $\|\mu_n\|_\infty < 1$ pour chaque n et $\mu_n \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ (il est important que α, C_0, et ε_0 restent les mêmes pour tout n!), et avec en plus $\lim_{n\to\infty} \mu_n(z) = \mu(z)$, disons, dans L^∞. Par exemple, $\mu_n(z) = \mu(z)$ si $|\mu(z)| < 1 - 1/n$ et $\mu_n(z) = (1 - 1/n)\mu(z)/|\mu(z)|$ sinon, conviendrait parfaitement.

Pour chaque n, notons $f_n = f_{\mu_n}$ la solution de $\partial\varphi/\partial\bar{z} = \mu_n \partial\varphi/\partial z$ normalisée par $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ et $f_n(\infty) = \infty$. Les f_n vérifient les propriétés (4) et (5) du Théorème 1 uniformément; on peut donc extraire une sous suite (que l'on notera encore f_n) qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction que l'on appellera f, et qui vérifie encore (4) et (5). De (4) et (5), on déduit que f est un homéomorphisme de $\mathbf{C}$ sur son image. On vérifie sans peine que $|f_n(z)|$ tend vers $+\infty$, uniformément en n, lorsque $|z|$ tend vers ∞ (on écrit $f_n = g_n \circ h_{\tilde{\mu}_n}$ comme au Paragraphe 4; pour $|z|$ assez grand, $|h_{\tilde{\mu}_n}(z)| \geq C^{te}|z|$, et par conséquent, $|g_n(h_{\tilde{\mu}_n}(z))| \geq C^{te}|z|^{1/K}$ puisque g_n est K-quasiconforme et fixe $0, 1$ et ∞). Donc, par un argument habituel de monodromie, f est un homéomorphisme du plan.

Prenons $E = D(0, M)$ dans (6). Il vient

$$|f_n(E)| = \int_E \Big|\frac{\partial f_n}{\partial z}\Big|^2 (1 - |\mu_n|^2) \leq C(M).$$

Donc les $\partial f_n/\partial z(1 - |\mu_n|^2)^{1/2}$ sont, uniformément en n, dans L^2_{loc} et, comme $(1-|\mu_n|^2)^{-1/2}$ est uniformément dans tous les L^q_{loc}, les $\partial f_n/\partial z$ sont uniformément dans L^p_{loc} pour $p < 2$ fixé. Bien sûr, les $\partial f_n/\partial \bar{z}$ sont aussi uniformément dans L^p_{loc}. Quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer que les dérivées partielles des f_n convergent faiblement dans L^p_{loc} vers des fonctions de L^p_{loc}.

Notons f_z la limite faible des $\partial f_n/\partial z$ et $f_{\bar{z}}$ la limite des $\partial f_n/\partial \bar{z}$. Comme $\partial f_n/\partial \bar{z} = \mu_n \partial f_n/\partial z$, on a $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ (on peut le vérifier sur des fonctions-test, par exemple); de plus si φ est une fonctions-test,

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial z} f = \lim_{n\to\infty} \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} f_n = -\lim_{n\to\infty} \int \varphi \frac{\partial f_n}{\partial z} = -\int \varphi f_z$$

par définition de f_z. Par conséquent, $\partial f/\partial z = f_z$ et de même $\partial f/\partial \bar{z} = f_{\bar{z}}$ au sens des distributions.

Pour finir la démonstration du Théorème 1, il ne reste plus qu'à montrer que f vérifie (6) et (7). Ce sera une conséquence facile du lemme suivant:

Lemme 12. *Si la suite f_n d'homéomorphismes du plan converge uniformément sur tout compact vers un homéomorphisme f, et si les f_n vérifient (6) et (7) uniformément, alors f aussi vérifie (6) et (7).*

Le lemme est facile: on commence par montrer (6) et (7) lorsque E est, disons, un rectangle; le cas général s'en déduit par passage à la limite.

Remarques. Pour le moment, nous ne savons pas encore que la suite f_n converge, uniformément sur tout compact, vers f. Nous avons cependant montré que, de toute suite de (f_n), on peut extraire une sous-suite qui converge vers une solution de l'équation (3). Lorsque nous aurons prouvé l'unicité, nous saurons que toute sous-suite de (f_n) admet une sous-suite qui converge vers f. On en déduira aussitôt que f_n converge, uniformément sur tout compact, vers f (sans avoir à extraire de sous-suite).

Par ailleurs, on sait déjà que les $\tilde{\mu}_n$ données par la Proposition 3 convergent vers $\tilde{\mu}$ dans L^∞ (ici, K est fixé); donc, dans la décomposition $f_{\mu_n} = g_n \circ h_{\tilde{\mu}_n}$, les $h_{\tilde{\mu}_n}$ convergent vers $h_{\tilde{\mu}}$ uniformément sur $\mathbf{C}$. Par conséquent, si les f_{μ_n} convergent vers une solution f, alors les g_n convergent aussi, uniformément sur tout compact, vers une application g, qui est donc K-quasiconforme et qui vérifie $f = g \circ h_{\bar{\mu}}$.

Notons pour finir que cette aptitude à extraire des sous-suites dont les dérivées partielles convergent faiblement dans L^q, $q < 2$, permet de montrer sans fatigue le résultat suivant, que nous énoncons comme un lemme:

Lemme 13. *Si $(\mu_n) \subset CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ est une suite, si f_n est, pour chaque n un homéomorphisme μ_n-conforme, si (f_n) converge uniformément sur tout compact vers un homéomorphisme f, et si $\mu_n \to \mu$ dans L^r (disons $r > 2$), alors f est μ-conforme.*

On peut certainement raffiner ce résultat.

8. Unicité de f_μ et factorisation des solutions de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z}$

Lorsque $\mathcal{U}$ est un domaine de $\mathbf{C}$ et $\mu \in CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$, on peut bien sûr prolonger μ à $\mathbf{C}$ tout entier en posant $\mu(z) = 0$ pour $z \notin \mathcal{U}$. On notera encore μ la fonction ainsi prolongée, et f_μ la solution de l'équation de Beltrami obtenue au Théorème 1.

Théorème 2. *Soient $\mu \in CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ et $f\colon \mathcal{U} \to \mathbf{C}$, avec des dérivées partielles dans L^p pour un $p > 2$, et telle que $\partial f/\partial \bar{z} = \mu \partial f/\partial z$ presque-partout. Alors $f = h \circ f_\mu$, où f_μ est comme au Théorème 1 et h est une fonction analytique définie sur $f_\mu(\mathcal{U})$.*

Soient $\mu \in CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ et $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un homéomorphisme. On suppose que f est ACL, ou que f a des dérivées partielles localement intégrables, et que $\partial f/\partial \bar{z} = \mu \partial f/\partial z$ p.p. Alors $f = h \circ f_\mu$, où h est une application conforme de $f_\mu(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{V}$ et f_μ est comme au Théorème 1.

Remarques. On déduit aussitôt de ce théorème que la solution homéomorphique f_μ de l'équation (3) qui fixe 0, 1 et ∞ est unique.

Notons tout de suite que si f est un homéomorphisme avec des dérivées partielles dans L^1_{loc}, alors f est ACL (voir par exemple Ahlfors, p. 28) et que si f est un homéomorphisme ACL, alors f est différentiable presque-partout (voir la remarque suivant le Théorème 1).

Si f a des dérivées dans L^p, $p > 2$, on pose $h = f \circ f_\mu^{-1}$. Alors h a des dérivées partielles presque-partout, et la matrice Jacobienne de h est donnée par $(Dh)(z) = (Df)(f_\mu^{-1}(z))(Df_\mu^{-1})(z)$, où Df désigne la matrice Jacobienne de f. Les formules de composition des dérivées permettent déjà de dire que $\partial h/\partial \bar{z} = 0$ presque-partout. Comme on veut appliquer le lemme de Weyl, il ne nous reste plus qu'à montrer que $Dh \in L^1_{\text{loc}}$.

Vérifions seulement que $Dh(z) = (Df)(f_\mu^{-1}(z))(Df_\mu^{-1})(z)$ est dans L^1_{loc}; le fait que cette fonction est bien la dérivée de h au sens des distributions en découlerait par passage à la limite. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact de $f_\mu(\mathcal{U})$;

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} \|Dh(z)\|\, dx\, dy \le \int_{\mathcal{O}} &\|(Df)(f_\mu^{-1}(z))\|\, \|Df_\mu^{-1}(z)\|\, dx\, dy \\ &\int_{\mathcal{O}} \|(Df)(f_\mu^{-1}(z))\|\, \|(Df_\mu(f_\mu^{-1}(z))^{-1}\|\, dx\, dy \\ &\int_{f_\mu^{-1}(\mathcal{O})} \|Df(\zeta)\|\, \|(Df_\mu(\zeta))^{-1}\|\, Jf_\mu(\zeta)\, d\xi\, d\eta,\end{aligned}$$

où Jf_μ est le déterminant Jacobien de f_μ et $\zeta = \xi + i\eta = f_\mu^{-1}(z)$.

Comme $\|D(f)\| \in L^p_{\rm loc}$, il suffit de montrer que $\|D(f_\mu)^{-1}\|\, Jf_\mu \in L^q_{\rm loc}$ où $1/p + 1/q = 1$. Or

$$\|D(f_\mu)^{-1}\| \le C(J_\mu)^{-1/2}(1-|\mu|)^{-1},$$

de sorte que

$$\|D(f_\mu)^{-1}\|\, Jf_\mu \le C(J_\mu)^{1/2}(1-|\mu|)^{-1} \in L^q_{\rm loc}$$

car $Jf_\mu \in L^1_{\rm loc}$ et $(1-|\mu|)^{-1}$ est localement dans tous les L^r. Ceci démontre la première affirmation du théorème.

Soit maintenant f un homéomorphisme ACL tel que $\partial f/\partial \bar z = \mu \partial f/\partial z$ presque-partout (on sait par la remarque qui suit le théorème qu'il suffit de considérer ce cas). Reprenons une fois de plus un argument de [A] pour montrer que le Jacobien de f est dans $L^1_{\rm loc}$: soit $E \to |f(E)|$ la mesure-image par f de la mesure de Lebesgue. Cette mesure a une partie absolument continue donnée par la fonction $J(z) = \lim |f(Q)|/|Q|$ (où Q est un carré qui tend vers z) presque-partout. On a alors $\int_E J(z) dx dy \le |f(E)|$ pour tout E mesurable (comme on ne sait pas si f est absolument continue, on n'est pas sûr de l'égalité). De plus, en chaque point où f est differentiable, c-à-d. presque-partout puisque f est un homéomorphisme ACL, $J(z) = |\partial f/\partial z|^2 - |\partial f/\partial \bar z|^2$.

Par conséquent, $|\partial f/\partial z|^2(1-|\mu|^2) \in L^1_{\rm loc}$ et comme $(1-|\mu|^2)^{-1}$ est dans tous les L^p, il vient $\partial f/\partial z \in L^q_{\rm loc}$ pour tout $q < 2$. De même $\partial f/\partial \bar z \in L^q_{\rm loc}$ pour tout $q < 2$. Il nous faut encore vérifier que $\partial f/\partial z$ et $\partial f/\partial \bar z$ sont bien les dérivées de f au sens des distributions. Pour toute fonction-test φ,

$$\int\!\!\int \frac{\partial f}{\partial x} \varphi\, dx\, dy = \int_y \left(\int_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \varphi(x,y)\, dx \right) dy$$

(où l'intégrale en x converge pour presque-tout y par Fubini)

$$= \int_y - \left(\int_x f(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\, dx \right) dy$$

(parce que pour presque-tout y, $f(\cdot, y)$ est absolument continue)

$$= - \int\!\!\int f(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy$$

(par Fubini à nouveau). Finalement, on a montré le résultat intermédiare suivant:

Lemme 14. *Soit $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un homéomorphisme μ-conforme (au sens de la Définition 2), où $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$. Alors pour tout $q < 2$, f a des dériveées partielles dans L^q_{loc} au sens des distributions.*

Revenons à la démonstration du théorème. Définissons $\tilde{\mu}$ comme au Paragraphe 4, en prenant soin de choisir K assez grand pour que $\tilde{\mu} \in CL(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_0, \tilde{\varepsilon}_0)$ avec $\tilde{\alpha} > 3/m$, $\tilde{\varepsilon}_0 = 1$ et $\tilde{C}_0$ assez petit pour que $\tau = (h^{\tilde{\mu}}(1))^{-1}$ vérifie $1/2 \le |\tau| \le 2$ (c'est possible: appliquer la Proposition 1 à $\tilde{\mu}$, en tenant compte de la Proposition 3).

On pose $h_{\tilde{\mu}}(z) = \tau h^{\tilde{\mu}}(z)$, de sorte que $h_{\tilde{\mu}}(z)$ a le dérivées $\partial h_{\tilde{\mu}}/\partial z = \tau(f+1)$ et $\partial h_{\tilde{\mu}}/\partial \bar{z} = \tau\tilde{\mu}(f+1)$ comme on l'a montré au Paragraphe 7. De plus, $h_{\tilde{\mu}}$ est bien un homéomorphisme du plan: c'est même la solution de l'équation $\partial h/\partial \bar{z} = \tilde{\mu}\partial h/\partial z$ qu'on a obtenue dans la démonstration du Théorème 1, puisque cette solution était la limite d'une suite extraite de h_{μ_n}, où les μ_n convergent vers μ dans L^∞ et puisque nous savons que les h^{μ_n} convergent vers $h^{\tilde{\mu}}$ dès que $\mu_n \to \tilde{\mu}$ dans L^∞ en restant dans $CL(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_0, 1)$.

Soit $G = f \circ h_{\tilde{\mu}}^{-1}$; G est différentiable presque-partout, et $|\partial G/\partial \bar{z}| \le (K-1)/(K+1)|\partial G/\partial z|$ presque-partout. Pour montrer que G est K-quasiconforme, il nous suffira de prouver que G a des dérivées partielles localement intégrables. A nouveau, on écrit $DG(z) = (Df)\big(h^{-1}(z)\big)(Dh^{-1})(z)$, où, pour simplifier, on a posé $h = h_{\tilde{\mu}}$. On a encore

$$\int_{\mathcal{O}} \|DG(z)\|\, dx dy = \int_{h^{-1}(\mathcal{O})} \|Df(z)\|\, \big\|(Dh(z))^{-1}\big\|\, Jh(z) dx dy.$$

Comme on vient de voir que $\|Df\|^2\,(1-|\mu|^2) \in L^1_{\text{loc}}$, il suffira de vérifier que

$$\big\|(Dh)^{-1}\big\|\, Jh\big(1-|\mu|^2\big)^{-1/2} \in L^2_{\text{loc}}$$

ou que

$$(Jh)^{1/2}\big(1-|\tilde{\mu}|^2\big)^{-1}\big(1-|\mu|^2\big)^{-1/2} \in L^2_{\text{loc}},$$

ou encore, puisque $|\tilde{\mu}| \le |\mu|$, que

$$(Jh)^{1/2}\big(1-|\mu|^2\big)^{-3/2} \in L^2_{\text{loc}}.$$

On veut donc estimer

$$\int_{D(0,R)} (Jh)(z)\big(1-|\mu|^2(z)\big)^{-3}\, dx\, dy$$

pour tout $R > 0$. On pose $E_n = D(0,R) \cap \{z \in \mathbf{C}\,; 2^{-n} \le 1-|\mu| \le 2^{-n+1}\}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{E_n} (Jh)(z)\big(1-|\mu|^2\big)^{-3}\, dx\, dy &\le C2^{3n} \int_{E_n} (Jh)(z)\, dx\, dy \\ &\le C2^{3n}\big|h(E_n)\big| \le C2^{3n}\big|h^{\tilde{\mu}}(E_n)\big|.\end{aligned}$$

Puisque $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$, $|E_n| \leq C \exp -\alpha 2^{n-1} < 1/2$ si n est assez grand. On peut appliquer la Proposition 2 (qui reste valable pour $\tilde{\mu} \in CL(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_0, 1)$, même si $\tilde{\mu}$ n'est pas à support compact ni tel que $\|\tilde{\mu}\|_\infty < 1$, par simple passage à la limite) et on obtient

$$\left|h^{\tilde{\mu}}(E_n)\right| \leq C\left(\operatorname{Log}\frac{1}{|E_n|}\right)^{-2\gamma+2}$$

si n est assez grand. Alors

$$\left|h^{\tilde{\mu}}(E_n)\right| \leq C(\alpha 2^{n-1})^{-2\gamma+2} \leq C 2^{-2n(\gamma-1)},$$

d'où

$$\int_{E_n} Jh(z)\left(1-|\mu|^2(z)\right)^{-3} dx\, dy \leq C 2^{-n}$$

si on a choisi K assez grand pour pouvoir prendre $\gamma = 3$. Donc G a des dérivées dans L^1_{loc}, et G est K-quasiconforme.

Supposons d'abord que f est une solution (a priori quelconque) de (3) fixant 0, 1, et ∞. Alors G est un homéomorphisme quasiconforme fixant 0, 1, et ∞, et dont la dilatation est donnée par la formule

$$\mu_G \circ h = \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(\overline{\frac{\partial h}{\partial z}}\right)^{-1} \frac{\mu - \tilde{\mu}}{1-\mu\overline{\tilde{\mu}}}.$$

On sait qu'il n'existe qu'un seul homémorphisme G avec ces conditions (notons-le G_0). Par conséquent, la solution de (3) qui fixe 0, 1, et ∞ est unique, et $f_\mu = G_0 \circ h_{\tilde{\mu}}$.

Dans le cas général où f est μ-conforme, nous avons montré que $f = G \circ h_{\tilde{\mu}}$, où G est un homéomorphisme quasiconforme qui a la même dilatation que G_0. Alors $H = G \circ G_0^{-1}$ est conforme, et $f = G \circ h_{\tilde{\mu}} = H \circ G_0 \circ h_{\tilde{\mu}} = H \circ f_\mu$, ce qui termine la démonstration du Théorème 2.

9. Quelques propriétés des homéomorphismes μ-conformes

Rappelons que, lorsqu'il n'est fait allusion à aucun μ particulier, nous entendons par homéomorphisme μ-conforme un homéomorphisme f pour lequel il existe $\mu \in CL_U(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ tel que f soit μ-conforme au sens de la Définition 2. Nous dirons que f est localement μ-conforme si, pour tout point du domaine de définition de f, on peut trouver un voisinage de ce point sur lequel f est μ-conforme.

Commençons par énoncer quelques propriétés de stabilité de la classe des homéomorphismes μ-conformes. Notons que cette classe n'est stable ni par composition, ni par passage à la réciproque (voir le Paragraphe 12). Cependant,

1) Si f est μ-conforme et si g est conforme, alors $g \circ f$ est μ-conforme (et on peut garder les mêmes $\alpha, C_0, \varepsilon_0$).
2) Si f est μ-conforme et si g est K-quasiconforme, alors $g \circ f$ est μ-conforme (et on pourra prendre α/K au lieu de α).
3) Si $f(z) = az+b$ avec $a \neq 0$, et si g est μ-conforme, alors $g\circ f$ est μ-conforme (on peut garder α et ε_0, mais il faut diviser C_0 par $|a|^2$).
4) Si f est conforme et g est μ-conforme, alors $g \circ f$ est localement μ-conforme. La dilatation de $g \circ f$ est encore dans $CL_{\mathcal{O}}(\alpha, \tilde{C}_0, \varepsilon_0)$ avec $\tilde{C}_0 = C_0 / \inf_{\mathcal{O}} |f'|^2$.
5) Si f est quasiconforme et g est μ-conforme, alors $g \circ f$ est localement μ-conforme.

Ces affirmations sont aisément vérifiées: donnons par exemple une idée de la façon dont on prouve 5). Il s'agit d'abord de démontrer que, en notant $F = f^{-1}$, $g \circ F^{-1}$ a des dérivées partielles localement intégrables. Comme précédemment, on se ramène à estimer $\int_{F^{-1}(\mathcal{O})} \|Dg\| \, \|(DF)^{-1}\| \, JF \, dx \, dy$ lorsque $\mathcal{O}$ est un petit ouvert; on s'en tire en remarquant que Dg est dans tous les L^q, $q < 2$, alors que $\|(DF)^{-1}\| \, JF$ est dans un L^p $p > 2$. Pour finir de prouver 5), il ne reste plus qu'à estimer $|E_\varepsilon \cap \mathcal{O}|$, où $E_\varepsilon = \{x;\ |\mu_{g\circ f}(x)| > 1-\varepsilon\}$, ε est assez petit, et $\mathcal{O}$ est un petit ouvert. On remarque que $E_\varepsilon \subset f^{-1}(F_{\varepsilon'})$, où $F_{\varepsilon'} = \{x;\ |\mu_g(x)| > 1-\varepsilon'\}$, où $(1+\varepsilon')/(1-\varepsilon') = K(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ et f est K-quasiconforme. L'estimation de $|E_\varepsilon \cap \mathcal{O}|$ se fait en remarquant que $|f^{-1}(E)| < C|E|^{1/AK}$ localement.

On peut utiliser la propriété de factorisation mentionnée au Théorème 2 pour contrôler la régularité d'un homéomorphisme μ-conforme défini sur un domaine $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathcal{V}$. On peut par exemple contrôler la vitesse avec laquelle $f(z)$ tend vers le bord de $\mathcal{V}$ lorsque z tend vers le bord de $\mathcal{U}$ (mais ce contrôle est assez mauvais). On montre aussi que f et f^{-1} préservent les ensembles de mesure nulle. Nous n'insistons pas sur les détails, d'autant plus que la définition de $CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ semble assez mal adaptée à la géometrie de $\mathcal{U}$.

Il serait sans doute intéressant d'avoir des définitions plus naturelles que celles de $CL_{\mathcal{U}}(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$, et en particulier des définitions qui tiendraient compte de la proximité au bord de $\mathcal{U}$. Une condition sur μ qui soit raisonnablement invariante par représentations conformes et qui soit quand même utilisable serait la bienvenue.

De même, il serait peut-être plus naturel de démontrer un analogue du Théorème 1 lorsque, dans la Définition 1, la taille de $\{z;\ |\mu(z)| > 1-\varepsilon\}$ est évaluée avec la mesure $dx\,dy/(1+x^2+y^2)$, au lieu de $dx\,dy$. De cette manière, le point ∞ ne serait plus aussi honteusement privilégié.

Pour tout cela, il serait sans doute bon d'avoir des démonstrations qui ne reposent pas de manière aussi lourde sur l'équation de Beltrami. Cela permettrait d'ailleurs d'espérer démontrer quelque chose en dimension > 2.

Il semble qu'il n'y ait pas de condition nécessaire et suffisante simple qui caractérise les images des cercles par des homéomorphismes μ-conformes, ou même qui caractérise les restrictions à $\mathbf{R}$ d'homéomorphismes μ-conformes h fixant $\mathbf{R}$.

Par exemple, une condition de la forme

$$\frac{1}{M(t)} \leq \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} \leq M(t)$$

ne convient pas (on peut s'en apercevoir en comparant les $M(t)$ qui interviennent dans les exemples 1 et 2 du Paragraphe 12).

10. Dépendance de f_μ en fonction de μ

Commençons par étudier un peu la fonction h^μ du Paragraphe 2. Comme $h^\mu(z) = z + P\big(\mu(f+1)\big)(z) = z + P\mu(z) + P(\mu T\mu)(z) + \cdots$ on se rend compte facilement que, pour tout z, $h^\mu(z)$ est une fonction analytique de μ, au moins quand $\|\mu\|_\infty < 1$ et $\|\mu\|_p \leq C$ pour un $p > 2$. On voudrait en savoir plus, et en particulier se débarrasser des hypothèses sur $\|\mu\|_\infty$ et $\|\mu\|_p$.

Notons d'abord que si $\mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$ et $\nu \in L^\infty$ est telle que $\mu + t\nu \in CL(\alpha, C_0, 1)$ pour $0 \leq t < t_0$ pour un $t_0 > 0$, alors $\mu \to h^\mu(z)$ a au moins $\alpha m - 4$ dérivées dans la direction ν. Pour le voir, on reprend les notations du début du Paragraphe 7 et on écrit

$$f_n^1 - f_n^2 = \sum_k T\mu_1 \ldots \mu_1 T(\mu_1 - \mu_2) T\mu_2 \ldots T\mu_2$$

(où le $\mu_1 - \mu_2$ est à la $k$ième place), puis

$$D_{f_n^1}(\mu_2 - \mu_1) = \sum_k T\mu_1 \ldots \mu_1 T(\mu_1 - \mu_2) T\mu_1 \ldots T\mu_1,$$

et

$$f_n^1 - f_n^2 - D_{f_n^1}(\mu_2 - \mu_1) = \sum_k \sum_{l<k} T\mu_1 \ldots T(\mu_1 - \mu_2) T\mu_1 \ldots$$
$$\ldots \mu_1 T(\mu_1 - \mu_2) T\mu_2 \ldots T\mu_2,$$

où le premier $\mu_1 - \mu_2$ est à la $l$ième place et le second est à la $k$ième place.

On montrerait, sans beaucoup plus de peine que pour (65), que
$|h^{\mu_1} - h^{\mu_2}$ – dérivée de h^μ en μ_1 dans la direction $(\mu_2 - \mu_1)|(z)$

$$\leq C(\alpha,\gamma) C_0^{1/2} \|\mu_2 - \mu_1\|_\infty^2 \left(\mathrm{Log}\left(2 + \frac{C_0^{1/2}}{|z|}\right)\right)^{-\gamma+4},$$

où la dérivée de h^μ en μ_1 est de la forme

$$(\mu_2 - \mu_1) \to \sum_n P\left(\mu_1 D_{f_n^1}(\mu_2 - \mu_1)\right)(z) + \sum_n P\left((\mu_1 - \mu_2) f_n^1\right)(z).$$

On montrerait de la même manière l'existence de dérivées d'ordre supérieur.

Il est amusant de constater que, bien que $h^\mu(z)$ ne soit dérivable que dans certaines directions, sa dérivée peut être étendue naturellement à toutes les directions $\mu_2-\mu_1 \in L^\infty$ (même celles pour lesquelles $\|\mu_2\|_\infty > 1$, par exemple). On est donc dans un cas où "l'espace d'holomorphie" (s'il existe), ou même les directions dans lesquelles $\mu \to h^\mu(z)$ est holomorphe ne seront pas déterminées par le domaine de définition de l'opérateur dérivée (ni même par les dérivées d'ordre supérieur). Un comportement semblable aurait lieu pour $h_\mu(z) = h^\mu(z)/h^\mu(1)$.

Nous allons maintenant étudier la fonction f_μ du Théorème 1, et montrer l'existence de dérivées de la fonction $\mu \to f_\mu$ à tous les ordres (et même l'analycité de cette fonction). Il nous faudra pour cela restreindre l'ensemble des directions dans lesquelles on fait varier μ.

On associe à $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ une fonction de jauge définie par $j(z) = 1 - |\mu(z)|$. Les directions ν que nous considérerons seront celles pour lesquelles $\nu(z)/j(z)$ est bornée. Notons que, si $\|\nu(z)/j(z)\| \le \varrho < 1$, alors $\mu+\nu \in CL((1-\varrho)\alpha, C_0, (1-\varrho)\varepsilon_0)$.

Lemme 15. *La fonction $\mu \to f_\mu(z)$ est analytique sur $\{\mu \in L^\infty;\ \|\mu\|_\infty < 1 \text{ et } \mu \in L^p\}$ au sens suivant: pour tout $z \in \mathbf{C}$ et tout plan complexe P (de la forme $\mu_0+\mathbf{C}\nu$), la restriction à l'ouvert $\{\xi \in \mathbf{C};\ \mu_0+\xi\nu \in L^p \text{et } \|\mu_0+\xi\nu\|_\infty < 1\}$ de la fonction $\xi \to f_{\mu_0+\xi\nu}(z)$ est une fonction holomorphe.*

Il n'y a rien à démontrer, car lorsque $\|\mu\|_\infty < 1$ et $\mu \in L^p$, alors $f_\mu(z) = h^\mu(z)/h^\mu(1)$, et $h^\mu(z) = z + P\mu(z) + \cdots$ est donnée par une série de polynômes en μ qui converge absolument.

Lemme 16. *Soient $\mu \in L^\infty$, $\|\mu\|_\infty < 1$ et $\nu \in L^\infty$.*

Soit γ: $S^1 \to \mathbf{C}$ un lacet C^∞ tel que, pour tout $\theta \in S^1$, $\|\mu+\gamma(\theta)\nu\|_\infty < 1$. Soit $\xi \in \mathbf{C}$ un point d'indice 1 par rapport à γ. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$f_{\mu+\xi\nu}(z) = \frac{i}{2\pi}\int_{S^1} f_{\mu+\gamma(\theta)\nu}(z)\frac{d\gamma(\theta)}{\xi-\gamma(\theta)}. \tag{66}$$

Comme l'ensemble des points ξ tels que $\|\mu+\xi\nu\|_\infty < 1$ et $\mu+\xi\nu \in L^p$ est un ouvert convexe contenant γ et ξ, (66) est une conséquence immédiate du Lemme 12 lorsque μ et ν sont à support compact. Il nous faut donc faire un petit passage à la limite. Pour $N \in \mathbf{N}$, on pose $\mu_N = \mu\mathbf{1}_{\{|z|\le N\}}$ et $\nu_N = \nu\mathbf{1}_{\{|z|\le N\}}$. Il nous suffira de montrer que, pour z fixé et $\theta \in S^1$, les $f_{\mu_N+\gamma(\theta)\nu_N}(z)$ convergent vers $f_{\mu+\gamma(\theta)}$ avec une vitesse qui ne dépend pas de θ.

On reprend la décomposition habituelle de f_{μ_N} en $f_{\mu_N} = g_N \circ h_N$, où g_N et h_N sont quasiconformes et h_N a la dilatation $\mu_N\mathbf{1}_{\{|z|\le 10\}}$. On remarque que h_N ne dépend pas de $N > 10$. Alors la dilatation de $1/g_N(1/z)$ converge dans L^p pour un $p > 2$ (et avec une vitesse qui ne dépend que de $\|\mu\|_\infty < 1$). On en déduit que g_N converge vers g uniformément en z et en $\|\mu\|_\infty$, et donc que

$f_{\mu_N+\gamma(\theta)\nu_N}(z)$ converge vers $f_{\mu+\gamma(\theta)\nu}(z)$ uniformément en θ, ce qui démontre le lemme.

Lemme 17. *Soient $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ et $\nu \in L^\infty$ tel que $\|\nu(z)/j(z)\|_\infty \leq 1$. Soient γ: $S^1 \to D(0,1)$ un arc C^∞ et $\xi \in D(0,1)$ un point d'indice 1 par rapport à γ. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$,*

$$f_{\mu+\xi\nu}(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{\theta \in S^1} f_{\mu+\gamma(\theta)\nu}(z) \frac{d\gamma(\theta)}{\xi - \gamma(\theta)}.$$

Il s'agit à nouveau d'un argument d'approximation. On pose

$$\begin{cases} \mu_N(z) = \mu(z) & \text{si } |\mu(z)| \leq 1 - 1/N, \\ \mu_N(z) = (1 - 1/N)\mu(z)/|\mu(z)| & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions que, pour $|\lambda| < 1$, $\|\mu_N + \lambda\nu\|_\infty \leq 1 - (1 - |\lambda|)/N < 1$. Si $|\mu(z)| \leq 1 - 1/N$, alors

$$|\mu_N(z) + \lambda\nu(z)| = |\mu(z) + \lambda\nu(z)| \leq |\mu(z)| + |\lambda|(1 - |\mu(z)|)$$

$$= |\mu(z)|(1 - |\lambda|) + |\lambda| \leq (1 - \frac{1}{N})(1 - |\lambda|) + |\lambda| = 1 - \frac{1}{N}(1 - |\lambda|).$$

Si par contre, $|\mu(z)| > 1 - 1/N$, alors

$$|(\mu_N + \lambda\nu)(z)| \leq 1 - \frac{1}{N} + |\lambda|(1 - |\mu(z)|) \leq 1 - \frac{1}{N} + |\lambda|\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N}(1 - |\lambda|).$$

Donc, pour tout $\theta \in S^1$, $\|\mu_N + \gamma(\theta)\nu\|_\infty \leq (1 - \sup_\theta |\gamma(\theta)|)/N < 1$, et l'on peut appliquer le Lemme 13 à μ_N, ν et γ.

Or, pour tout θ, $f_{\mu_N+\gamma(\theta)\nu}(z)$ converge vers $f_{\mu+\gamma(\theta)\nu}(z)$ uniformément sur tout compact car $\mu_N + \gamma(\theta)\nu \to \mu + \gamma(\theta)\nu$ dans L^∞ (voir la remarque en fin de Paragraphe 7). De plus, $f_{\mu_N+\gamma(\theta)\nu}(z)$ est majorée, sur tout compact, indépendamment de N et de θ.

Le Lemme 17 est donc une conséquence du théorème de convergence dominée.

Théorème 3. *Soient $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$ et $j(z) = 1 - |\mu(z)|$. La fonction $v \to f_{\mu+jv}$, définie pour $v \in L^\infty(\mathbf{C})$, $\|v\|_\infty < 1$ et à valeurs dans $C(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, est analytique. En particulier, il existe des opérateurs T_k^μ, k-linéaires bornés sur L^∞ et à valeurs dans $C(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ tels que $f_{\mu+jv}(z) = \sum_k T_k(v, \ldots, v)(z)$, avec convergence absolue pour $\|v\|_\infty < 1$.*

Démonstration. Pour z fixé, le Lemme 17 montre que la restriction de $v \to f_{\mu+jv}(z)$ à tout plan complexe est holomorphe. Comme $f_{\mu+jv}(z)$ reste borné (toujours pour z fixé), la restriction de $f_{\mu+jv}(z)$ à tout sous-espace complexe de dimension finie est encore analytique (ici, comme la fonction considérée est bornée, point n'est besoin de faire appel au théorème de Hartogs: on peut tout simplement utiliser la formule de Cauchy). D'où l'existence de formes k-linéaires bornées: $L^\infty \times \cdots \times L^\infty \to \mathbf{C}$ correspondant à la dérivée $k$ième de $f_{\mu+jv}(z)$ dans la direction v (pour vérifier la k-linéarité, on peut se restreindre à des espaces de dimension finie; pour majorer la norme de formes k-linéaires, on utilise la formule de Cauchy et le fait qu'on a des majorations uniformes de $f_{\mu+jv}(z)$ lorsque $\|v\|_\infty \leq \varrho < 1$ dues au fait que $\mu + jv \in CL\big((1-\varrho)\alpha, C_0, (1-\varrho)\varepsilon_0\big)$.

Le fait que, pour z fixé, la série $\sum_k T_k(v, \ldots, v)(z)$ converge vers $f_{\mu+jv}(z)$ n'est que l'analycité en une seule variable. Nous devons encore vérifier que la série converge dans $C(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, c-à-d. uniformément sur tout compact. On se donne un compact K. Pour $z \in K$ et $\|v\|_\infty \leq \varrho < 1$, on a $f_{\mu+jv}(z) \leq C$ car $\mu + jv$ reste dans $CL((1-\varrho)\alpha, C_0, (1-\varrho)\varepsilon_0)$. On en déduit une majoration uniforme en $z \in K$ des dérivées $T_k^\mu(v, \ldots, v)(z)$ en utilisant la formule de Cauchy. La série donnant $f_{\mu+jv}(z)$ converge donc normalement pour la norme $\sup_K |f(z)|$.

Remarque. Comme ils peuvent être obtenus par la formule de Cauchy, les T_k^μ sont des fonctions continues de μ (pour des perturbations dans jL^∞).

Si $\mu \in CL(\alpha, C_0, \varepsilon_0)$, on peut, si on le désire, calculer les T_k^μ à partir de leur valeur lorsque $\|\mu\|_\infty < 1$ (on peut par exemple utiliser la formule de Cauchy et le fait que les f_{μ_N} convergent vers f_μ lorsque $\mu_N \to \mu$ dans L^∞).

Notons, que, même pour $\|\mu\|_\infty < 1$ (auquel cas on peut prendre $j = C^{te}$), ce résultat entraîne la continuité sur L^∞ d'opérateurs assez compliqués, que l'on aurait du mal à estimer autrement (dans le cas assez improbable où l'on devrait estimer de tels opérateurs).

11. Le groupe $CLL(\alpha_0)$

Si l'on consent à restreindre un peu plus encore la classe des dilatations μ autorisées, il n'est pas difficile d'obtenir des propriétés de stabilité par composition ou par inversion. Nous donnons dans ce paragraphe un exemple de groupe de transformations μ-conforme.

On dira que la fonction μ est dans $CCL(\alpha_0)$ s'il existe $\alpha > \alpha_0$, C et $\beta > 0$ tels que

$$(67) \qquad \big|\{z \in \mathbf{C};\ |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\}\big| \leq C \exp -(\beta e^{\alpha/\varepsilon}) \quad \text{pour tout } \varepsilon \leq 1.$$

On dira aussi que l'homéomorphisme h est dans $CLL(\alpha_0)$ s'il est μ-conforme pour un $\mu \in CLL(\alpha_0)$. Le but de ce paragraphe est de montrer que $CLL(\alpha_0)$ est un groupe pour la composition.

On va tout simplement reprendre les estimations du Paragraphe 2; seules quelques modifications mineures sont nécessaires. A la place du Lemme 3, on écrit

$$\begin{aligned}\|f_n\|_2^2 &= \int_{\{|\mu|\le 1-\varepsilon\}} |\mu^2 f_{n-1}^2| + \int_{\{|\mu|>1-\varepsilon\}} |\mu^2 f_{n-1}^2| \\ &\le (1-\varepsilon)^2 \|f_{n-1}\|_2^2 + CC_p^{2n} \big|\{|\mu|>1-\varepsilon\}\big|^{(p-2)/p} \\ &\le (1-\varepsilon)^2 \|f_{n-1}\|_2^2 + CC_p^{2n} \exp -\beta\big(e^{\alpha/\varepsilon}(p-2)/p\big).\end{aligned}$$

On choisit cette fois-ci $\varepsilon = \alpha/\operatorname{Log} n$. Alors, si $\beta > 2p \operatorname{Log} C_p/(p-2)$ (ce qui est possible, quitte à changer un peu α et beaucoup C),

$$\begin{aligned}\|f_n\|_2^2 &\le \left(1-\frac{\alpha}{\operatorname{Log} n}\right)^2 \|f_{n-1}\|_2^2 + C\exp -\beta\big((p-2)n/p\big)\exp(2n\operatorname{Log} C_p) \\ &\le \left(1-\frac{\alpha}{\operatorname{Log} n}\right)^2 \|f_{n-1}\|_2^2 + C\exp -\eta n \qquad \text{pour un } \eta > 0.\end{aligned}$$

On déduit comme au Paragraphe 2 que

$$\|f_n\|_2^2 \le Ce^{-k\eta} + \left(1-\frac{\alpha}{\operatorname{Log} n}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{\alpha}{\operatorname{Log} k}\right)^2 \|f_{k-1}\|_2^2. \tag{68}$$

Il faut estimer $\pi(k,n) = \prod_{j=k}^{n}(1-\alpha/\operatorname{Log} j)^2$. On a

$$\begin{aligned}\tfrac12 \operatorname{Log}(\pi(k,n)) &= \sum_{j=k}^{n} \operatorname{Log}\left(1-\frac{\alpha}{\operatorname{Log} j}\right) \le \int_k^{n+1} \operatorname{Log}\left(1-\frac{\alpha}{\operatorname{Log} x}\right)dx \\ &\le -\alpha\int_k^{n+1}\frac{dx}{\operatorname{Log} x} + \alpha^2\int_k^{n+1}\frac{dx}{(\operatorname{Log} x)^2} \\ &\le -\alpha\left[\frac{x}{\operatorname{Log} x}\right]_k^{n+1} + (\alpha^2-\alpha)\int_k^{n+1}\frac{dx}{(\operatorname{Log} x)^2}\end{aligned}$$

après une intégration par parties.

On se donne $\theta_0 > 0$ (moralement très proche de 0, mais indépendant de n) et on choisit $k = \theta n$ pour un θ tel que $\theta_0/2 \le \theta \le \theta_0$ (et tel que k soit entier!). Alors

$$\begin{aligned}\tfrac12 \operatorname{Log}(\pi(k,n)) &\le -\alpha\left[\frac{n+1}{\operatorname{Log} n+1} - \frac{n\theta}{\operatorname{Log} n\theta}\right] + \alpha^2(n+1)\frac{1}{(\operatorname{Log} n\theta)^2} \\ &\le -\alpha(1-\theta)\frac{n}{\operatorname{Log} n} + C\frac{n}{(\operatorname{Log} n)^2} \\ &\le -\alpha(1-\theta_0)\frac{n}{\operatorname{Log} n} + C\frac{n}{(\operatorname{Log} n)^2}.\end{aligned}$$

Si $\alpha > \tilde{\alpha} > \alpha_0$, on peut choisir θ_0 assez petit pour que l'inégalité ci-dessus entraîne

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\bigl(\pi(k,n)\bigr) \leq -\tilde{\alpha}\frac{n}{\operatorname{Log} n},$$

au moins pour n assez grand. On déduit de (68) que

$$\|f_n\|_2^2 \leq C\exp -(2\tilde{\alpha}n/\operatorname{Log} n) + C\exp -\eta n\theta \leq C\exp -2\tilde{\alpha}n/\operatorname{Log} n,$$

toujours si n est assez grand.

Bien sûr, quitte à changer C, ceci reste vrai quand n est petit. On a montré que, pour tout $\mu \in CLL(\alpha_0)$, il existe $\alpha > \alpha_0$ et $C \geq 0$ tels que

$$\|f_n\|_2^2 \leq C\exp -2\alpha\frac{n+1}{Log(n+1)} \tag{69}$$

pour tout $n \geq 1$.

On reprend l'estimation de $h^\mu(z) - z$ faite au Paragraphe 2, en remplaçant l'estimation

$$|E_{n,k}| \leq CC_0(n+1)^{-2\gamma}/2^{2k}$$

par

$$|E_{n,k}| \leq C\exp -2\alpha\frac{(n+1)}{\operatorname{Log}(n+2)}2^{-2k}.$$

Il convenient à présent de poser $a_n = \exp -\bigl(\alpha(n+1)/\operatorname{Log}(n+2)\bigr)$, afin que l'on ait encore (27). La démonstration donnée au Paragraphe 2 peut être suivie tranquillement, et on obtient encore l'inégalité (42) qui sécrit

$$\bigl|h^\mu(z) - z\bigr| \leq C\exp -\left[\alpha\frac{(n_0+1)}{\operatorname{Log}(n_0+2)}\right],$$

où

$$\exp\left[\alpha\frac{(n_0+1)}{\operatorname{Log}(n_0+2)}\right]\exp\left[n_0\operatorname{Log} C_p\right] = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{|z|}\right)^{(p-2)/p} \tag{70}$$

si $|z|$ est assez petit, et $n_0 = 0$ sinon.

On déduit de (70) que, pour $|z|$ assez petit,

$$(n_0+1)(\alpha + \operatorname{Log} C_p) \geq \alpha\frac{(n_0+1)}{\operatorname{Log}(n_0+2)} + n_0\operatorname{Log} C_p = -\operatorname{Log} C + \frac{p-2}{p}\operatorname{Log}\frac{1}{|z|},$$

et donc que

$$\begin{aligned}
&\left|h^\mu(z)-z\right| \\
&\le C\exp - \left[\frac{\alpha(p-2)\operatorname{Log}(1/|z|)}{p(\alpha+\operatorname{Log}C_p)}\left(\operatorname{Log}\left(1+\frac{\alpha(p-2)}{p(\alpha+\operatorname{Log}C_p)}\operatorname{Log}\frac{1}{|z|}\right)\right)^{-1}\right] \\
&\le C\exp - \left(C\frac{\operatorname{Log}(2+\frac{1}{|z|})}{\operatorname{Log}\operatorname{Log}(3+\frac{1}{|z|})}\right).
\end{aligned}$$

Si $|z|$ n'est pas trop petit, on a tout simplement $\left|h^\mu(z)-z\right| \le C$, et par conséquent, dans tous les cas

$$|h^\mu(z)-z| \le C\exp - \left(C\frac{\operatorname{Log}(2+\frac{1}{|z|})}{\operatorname{Log}\operatorname{Log}(3+\frac{1}{|z|})}\right). \tag{71}$$

On peut aussi reprendre la démonstration de la Proposition 2, et obtenir la majoration

$$\left|h^\mu(E)\right| \le |E| + C\exp - \left(c\frac{\operatorname{Log}(2+\frac{1}{|E|})}{\operatorname{Log}\operatorname{Log}(3+\frac{1}{|E|})}\right). \tag{72}$$

En effet, la formule

$$\left|h^\mu(E)\right| = \left\|(f+1)\sqrt{1-|\mu|^2}\mathbf{1}_E\right\|_2^2$$

donne

$$\left|h^\mu(E)\right|^{1/2} < \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_E |f_n|^2(1-|\mu|^2)\right)^{1/2}.$$

On peut se contenter de regarder le cas où $|E|$ est assez petit, et on coupe la somme en $\sum_{n\le n_0}$ et $\sum_{n>n_0}$, où l'on a choisi $(n_0+1) = a\operatorname{Log}(1/|E|)$, avec a assez petit. Pour $n \le n_0$, on utilise l'estimation L^p (voir le Lemme 2)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le n_0}\left(\int_E |f_n|^2\right)^{1/2} &\le \sum_{n\le n_0} CC_p^n|E|^{(p-2)/2p} \\
\le CC_p^{n_0}|E|^{(p-2)/2p} &= C\exp\left(a\operatorname{Log}C_p\operatorname{Log}\frac{1}{|E|} - \frac{p-2}{2p}\operatorname{Log}\frac{1}{|E|}\right) \\
&\le C\exp - \left(C\operatorname{Log}\frac{1}{|E|}\right).
\end{aligned}$$

Pour $n > n_0$, on utilise (69), qui donne

$$\sum_{n \geq n_0} \left(\int_E |f_n|^2 \right)^{1/2} \leq C \sum_{n \geq n_0} \exp - \frac{\alpha(n+1)}{\operatorname{Log}(n+1)} \leq C(n_0+1) \exp - \frac{\alpha(n_0+1)}{\operatorname{Log}(n_0+1)}$$

(integration par parties)

$$\leq C \exp - \frac{\alpha(n_0+1)}{2 \operatorname{Log}(n_0+1)} \leq C \exp - \left(c \frac{\operatorname{Log}(1/|E|)}{\operatorname{Log}\operatorname{Log}(1/|E|)} \right),$$

d'où l'on déduit (72).

Une étude un peu plus précise de la manière dont (71) et (72) dépendent de la constante C de (67) permettrait de minorer $\left|h^\mu(z) - z\right|$ et $\left|h^\mu(E)\right|$; nous n'insistons pas plus.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que $CLL(\alpha_0)$ est un groupe. Commençons par vérifier que la dilatation de $(h^\mu)^{-1}$ est dans $CLL(\alpha_0)$ si $\mu \in CLL(\alpha_0)$. Notons $\tilde{\mu}$ cette dilatation. Alors

$$\begin{aligned} \left|\{z \in \mathbf{C}\,;\, |\tilde{\mu}(z)| > 1-\varepsilon\}\right| &= \left|h^\mu(\{z \in \mathbf{C};\, |\mu(z)| > 1-\varepsilon\})\right| \\ &\leq C \exp -\beta e^{\alpha/\varepsilon} + C \exp -C \left(\frac{C + \beta e^{\alpha/\varepsilon}}{\operatorname{Log}(C + \beta e^{\alpha/\varepsilon})} \right) \end{aligned}$$

pour un $\alpha > \alpha_0$. Ceci est bien inférieur à $C' \exp -(\beta' \exp \alpha'/\varepsilon)$ pour un $\alpha' > \alpha_0$ et des constantes C' et β' qui ne dépendent pas de ε. Par conséquent, $\tilde{\mu} \in CLL(\alpha_0)$.

Pour finir de prouver que, si f est μ-conforme, alors f^{-1} est dans $CLL(\alpha_0)$, il suffit de montrer que $h^{\tilde{\mu}} \circ f$ est conforme. Or on peut écrire $h^{\tilde{\mu}}$ comme une limite uniforme de h^{μ_n}, de telle sorte que les $h^{\mu_n} \circ f$ soient μ-conforme pour des μ qui restent dans un $CL(\alpha, C_0, \varepsilon)$. On en déduit que $h^{\tilde{\mu}} \circ f$ est μ-conforme, pour un μ qui est justement nul.

Pour vérifier que si f et g sont dans $CLL(\alpha_0)$, alors $f \circ g^{-1}$ est dans $CLL(\alpha_0)$, on procède pareillement:

$$|\{z \in \mathbf{C};\, |\mu_{f \circ g^{-1}}(z)| > 1-\varepsilon\}| = \left| g^{-1} \left(\left\{ z \in \mathbf{C};\, \frac{|\mu_f - \mu_g|}{|1 - \mu_f \bar{\mu}_g|}(z) > 1 - \varepsilon \right\} \right) \right|$$

$$\leq \left|g^{-1}(\{z \in \mathbf{C};\, |\mu_f(z)| > 1 - \varepsilon/10 \quad \text{ou } |\mu_g(z)| > 1 - \varepsilon/10\})\right| \leq C \exp -\beta e^{\alpha/\varepsilon}$$

pour un $\alpha > \alpha_0$ et deux constantes β et C.

Ainsi, $CLL(\alpha_0)$ est un groupe.

On pourrait bien sûr en déduire des minorations de $\left|h^\mu(z) - h^\mu(z')\right|$, ou de $\left|h^\mu(E)\right|$ en utilisant la propriété de stabilité de $CLL(\alpha_0)$ par inversion et les comparer avec celles qu'on aurait pu obtenir plus tôt.

On pourrait encore donner une version locale de $CLL(\alpha_0)$, qui est aussi stable par composition et inversion. Nous n'abuserons pas à ce point de la patience du lecteur.

12. Quelques exemples

On considère d'abord des exemples où $f(\varrho e^{i\theta}) = f(\varrho)e^{i\theta}$, où f est une bijection croissante de $[0,\infty]$, dérivable pour $\varrho \neq 0$. Un calcul facile que nous passerons sous silence montre que la dilatation complexe de f est donnée par

$$\mu(\varrho e^{i\theta}) = e^{2i\theta}\left(\frac{\varrho f'(\varrho) - f(\varrho)}{\varrho f'(\varrho) + f(\varrho)}\right)$$

et que la dilatation D au point $\varrho e^{i\theta}$ est

$$\max\left(\frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}, \frac{f(\varrho)}{\varrho f'(\varrho)}\right).$$

Exemple 1. $f(\varrho) = \exp -2(\operatorname{Log}\varrho)^2/\alpha$ au voisinage de 0. Alors $f'/f = (-4/\alpha)(\operatorname{Log}\varrho/\varrho)$, $D = (4/\alpha)\operatorname{Log}(1/\varrho)$, ce qui donne

$$\varepsilon = 1 - |\mu| = 2/\big((4/\alpha)\operatorname{Log}(1/\varrho) + 1\big)$$

et

$$\big|\{z;\, 1 - |\mu(z)| > \varepsilon\}\big| = \pi\varrho^2,$$

où $(4/\alpha)\operatorname{Log}(1/\varrho) = 2/\varepsilon - 1$, c-à-d. $\varrho = (\exp\alpha/4)(\exp -\alpha/2\varepsilon)$ et

$$\big|\{z;\, 1 - |\mu(z)| > \varepsilon\}\big| \leq C\exp -\alpha/\varepsilon.$$

Par conséquent, si l'on prolonge $f(\varrho)$, pour $\varrho > 1/10$, par quelque chose de raisonnable, f sera μ-conforme pour un $\mu \in CL(\alpha, C_0, 1)$. Ainsi, à part peut-être en ce qui concerne le facteur 2, l'estimation (5) est relativement réaliste.

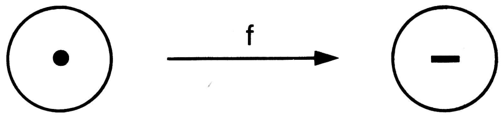
Exemple 2. $f(\varrho) = \big(\operatorname{Log}(1/\varrho)\big)^{-\alpha}$ au voisinage de 0. Alors $f'/f = (\alpha/\varrho)(1/\operatorname{Log}1/\varrho)$, $D = (1/\alpha)\operatorname{Log}(1/\varrho)$, ce qui donne $\mu \in CL(4\alpha, C_0, 1)$ comme précédemment. A nouveau, (4) n'est pas totalement irréaliste.

Notons que la réciproque de $f(\varrho)$ est donnée par

$$g(y) = \exp -y^{-1/\alpha},$$

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = (1/\alpha)y^{-(1+\alpha)/\alpha}$$

et la dilatation est $D = (1/\alpha)y^{-1/\alpha}$. Non seulement g n'est pas μ-conforme, mais encore la fonction de répartition de g est aussi mauvaise que celle de l'exemple suivant (qui n'est pas un homéomorphisme). On risque donc d'avoir du mal à trouver un groupe d'homéomorphismes contenant les homéomorphismes μ-conformes, et dont les éléments soient reconnaissables à la taille de leur dilatation.



Exemple 3. Il s'agit d'une application f qui est ACL, dont la dilatation vérifie $\left|\{1-|\mu|>\varepsilon\}\right| \leq C\varepsilon^N$ pour un N quelconque fixé à l'avance, et qui pourtant envoie homéomorphiquement un disque moins un point sur un disque moins un segment. L'existence d'une telle fonction rend improbable l'existence d'un théorème comme le Théorème 1 qui s'applique à des fonctions μ qui ont des singularités en $|z-z_0|^{-1/N}$.

On définit la fonction $f(x,y) = \big(X(x,y), Y(x,y)\big)$ dans un voisinage de 0, en laissant au lecteur le soin de l'étendre à $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ s'il le désire.

On se donne $\alpha > 0$ très proche de 0 (pour pouvoir prendre N assez grand), et l'on pose

$$X(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + \frac{|x|^{2+\alpha}\operatorname{sgn}(x)}{x^2+y^2}$$

et

$$Y(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^{(1-\alpha)/2}}.$$

On vérifie sans trop de peine la propriété

$$\left|\{1-|\mu|>\varepsilon\}\right| \leq C\varepsilon^N, \tag{73}$$

et aussi que les dérivées partielles de X et Y sont dans $L^{2-1/N}$ (en particulier, donc, f est ACL). On voit que f est continue sauf en 0 et que

$$\lim_{x\to 0+} X(x,0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} X(x,0) = -\frac{\pi}{2.}$$

Bien que désagréable, on ne peut pas prétendre que ce phénomène est pathologique, car f est la limite (non uniforme au voisinage de 0, bien sûr) d'homéomorphismes quasiconformes f_n dont les dilatations vérifient (73) uniformément. On peut prendre par exemple $f_n(x,y) = (X_n(x,y), Y_n(x,y))$ avec $X_n(x,y) = X(x,y)$ et $Y_n(x,y) = Y(x,y)$ pour $|y| > 1/n$, et $X_n(x,y) = X(x,1/n)$ et $Y_n(x,y) = nyY(x,1/n)$ sinon.

Bibliographie

[A] AHLFORS, L.V.: Lectures on quasiconformal mappings. - D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey—Toronto—New York—London, 1966.

[GR] GEHRING, F.W., and E. REICH: Area distortion under quasiconformal mappings. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 388, 1966, 1–15.

[L1] LEHTO, O.: Homeomorphisms with a given dilatation. - Proceedings of the 15th Scandinavian Congress, Oslo 1968. Lecture Notes in Mathematics 118. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970, 58–73.

[L2] LEHTO, O.: Remarks on generalized Beltrami equations and conformal mappings. - Proceedings of the Romanian-Finnish seminar on Teichmüller spaces and quasiconformal mappings, Romania, 1969. Publishing House of the Academy of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, 1971, 203–214.

[LV] LEHTO, O., and K.I. VIRTANEN: Quasikonforme Abbildungen. - Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1965.

[S] STEIN, E.M.: Singular integrals and differentiability properties of functions. - Princeton University Press, Princeton, 1970.

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 Palaiseau Cedex
France

Received 13 February 1987