Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 14, 1989, 177–212

DIMENSION CONFORME ET SPHÈRE À L'INFINI DES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

Pierre Pansu

We attach a conformal structure to the ideal boundary of a manifold of negative curvature. We construct a quasiconformal invariant—generalized module—estimate it in terms of curvature pinching, and compute it in the homogeneous case. This yields an unsharp lower bound for the pinching of metrics on locally symmetric spaces, and a sharp lower bound for the Hausdorff dimension of the limit set of certain quasiconformal groups.

Dans cet article, on démontre les résultats suivants

0.1. Théorème. *Soit M un quotient compact de l'espace hyperbolique complexe, i.e.,*

$$M = D^m/\Gamma$$

où Γ est un sous-groupe discret d'automorphisme de la boule unité D^m de $\mathbf{C}^m$. Alors M n'admet pas de métrique riemannienne dont la courbure sectionnelle K satisfait

$$-\Big(\frac{2m}{2m-1}\Big)^2 \leq K \leq -1.$$

0.2. Théorème. *Soit α une matrice semi-simple, considérée comme dérivation de l'algèbre de Lie abélienne $\mathbf{R}^n$. Considérons l'algèbre de Lie obtenue par extension de $\mathbf{R}^n$ par α, et notons G le groupe de Lie associé. Considérons une action de G par homéomorphismes uniformément quasiconformes de la sphère S^ν. Si G contient un élément loxodromique, son ensemble limite est une sphere topologique dont la dimension de Hausdorff est au moins égale à $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/\lambda_1$, où $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, sont les parties réelles des valeurs propres de α.*

Remarquer que P. Tukia [13] a construit, pour tout $n \geq 2$, un tel groupe quasiconforme avec $\nu = n+1$, $\lambda_i = 1$, $i \leq n-1$, $\lambda_n = \log 4/\log 3$, et dont l'ensemble limite a une dimension de Hausdorff exactement égale à $n-1+\log 4/\log 3$.

Le théorème 1 n'est pas nouveau, voir [3] et [10], mais la méthode, commune à celle du théorème 2, l'est. On introduit un invariant numérique, la "dimension conforme". C'est une version invariante conforme de la dimension de Hausdorff. Il a un sens pour un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{R}^n$, mais aussi pour la sphère à l'infini d'une variable simplement connexe à courbure négative bornée. On peut

doi:10.5186/aasfm.1989.1424

l'estimer en fonction du pincement de la courbure, et le calculer dans le cas des espaces homogènes (Théorème 5.5). Cela donne le théorème 1. Pour un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\text{dimension conforme} \leq \text{dimension de Hausdorff.}$$

D'autre part, une action quasiconforme de G sur S^ν, ayant un élément loxodromique, détermine un plongement quasiconforme de la sphère à l'infini de G sur l'ensemble limite de G dans S^ν, et ceux-ci augmentent la dimension conforme. On obtient ainsi le théorème 2.

0.3. Ce travail part des observations suivantes:

(1) "La géométrie hyperbolique en dimension $n+1$ tend, quand on s'approche de l'infini, vers la géométrie conforme de la sphère S^n"([12, p. 465]).

(2) Cette propriété classique s'étend aux espaces riemanniens symétriques de rang un.

Ceci joue un rôle dans le théorème de rigidité de G.D. Mostow pour ces espaces [9]. Plus précisément, leur sphère à l'infini porte une classe conforme de distances invariante par les isométries ([4, p. 98]). Ces distances ont une *dimension de Hausdorff,* c'est un entier, supérieur à la dimension ordinaire de la sphère à l'infini.

(3) Cette dimension de Hausdorff est invariante par quasiisométries.

C'est une étape dans la démonstration de la rigidité ([9, p. 163]).

(4) Plus généralement, on comprend bien l'allure de la sphère à l'infini d'un espace homogène à courbure négative.

Par exemple, le groupe résoluble, extension du groupe abélien $\mathbf{R}^2$ par une matrice diagonale D ayant valeurs propres e^λ et e^μ, $0<\lambda<\mu$ [11]. La sphère à l'infini s'identifie à $\mathbf{R}^2$, la matrice D engendre un groupe à un paramètre d'homothéties. Il y a une distance assez naturelle, homogène de degré λ sous D

$$d\big((x,y),(0,0)\big) = \max\big\{|x|, |y|^{\lambda/\mu}\big\},$$

mais, pour tout $u \leq 1$, d^u est aussi une distance homogène, ni meilleure ni moins bonne que d. La dimension de Hausdorff de d^u est $u\big(1+(\mu/\lambda)\big)$. Pour lever l'ambiguité créée par ce facteur u, il suffit de considérer une dimension *relative,* par exemple, la dimension de Hausdorff divisée par la dimension de Hausdorff d'une courbe "générique". Ceci nous conduit à la notion de *module* d'une famille de courbes, traditionnelle en géométrie conforme [15]. Dans la première partie, on montre que la sphère à l'infini d'une variété simplement connexe à courbure négative est munie d'une collection naturelle de "boules", structure suffisante pour définir des modules. Ensuite, on donne une minoration de module, qui conduit, dans la troisième partie, à la définition de la dimension conforme. Dans la quatrième partie, on montre que les plongements quasiisométriques se prolongent en plongements "quasiconformes" de la sphère à l'infini, et par conséquent, qu'ils augmentent la dimension conforme. Au paragraphe 5, on estime des modules sur ∂M en fonction du pincement sur M. Enfin, dans la dernière partie, on tente, sans grand succès, de relier module et capacités sur ∂M avec des capacités dans M.

Je tiens à remercier S. Rickman, qui m'a initié au concept de module, M. Zinsmeister qui m'a aidé à clarifier la dernière partie, et le referee pour ses nombreuses critiques.

1. Structure quasiconforme sur la sphère à l'infini

1.1. Définition. Soit X un ensemble. Une *structure quasiconforme* sur X est la donnée d'une famille de "boules", de la notion de rapport des rayons de deux boules concentriques, et de la notion de "petite" boule. Plus précisément, on se donne:

- une famille β de parties de X;
- une filtration décroissante

$$\beta = \beta_0 \supset \beta_1 \supset \cdots \supset \beta_n \supset \cdots$$

telle que si B, $B' \in \beta$, $B \subset B'$ et $B' \in \beta_n$, alors $B \in \beta_n$;
- une action de $\mathbf{R}_+$ sur β telle que $B \subset kB$ si $k \geq 1$, et $k\beta_n \subset \beta_{n'(k,n)}$, où, pour chaque k fixé, $n'(k,n)$ tend vers l'infini avec n.

Soit (X, β) un ensemble muni d'une structure quasiconforme. Un *anneau* est un couple $(a, \tilde{a})$ de parties de X tel que $a \subset \tilde{a}$. C'est un k*-anneau* s'il existe une boule B telle que

$$B \subset a \subset \tilde{a} \subset kB.$$

Si de plus, $kB \in \beta_n$, on dit que $(a, \tilde{a})$ est un k, n-anneau.

On dira qu'une propriété est satisfaite *pour tout* k*-anneau assez petit* s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que cette propriété soit satisfaite par tous les k, n-anneaux.

Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Deux structures quasiconformes sur X sont dites η*-équivalentes* si tout k-anneau assez petit de l'une est un $\eta(k)$-anneau de l'autre.

L'objet de cet article est d'attacher des invariants à une classe d'équivalence de structures quasiconformes.

1.2. Exemple. Dans un espace métrique, on prend pour β la collection des boules, l'action de $\mathbf{R}_+$ est

$$k, B(x,r) \mapsto B(x, kr).$$

et β_n est l'ensemble des boules de rayon inférieur à $1/n$.

1.3. Exemple. Dans un espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, soit B_0 un voisinage borné de l'origine, soit kB_0 l'image de B_0 par l'homothétie de rapport k. Soit β l'ensemble des images de B_0 par homothéties et translations. Deux telles structures quasiconformes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes.

La même construction s'applique à un groupe de Lie muni d'un groupe à un paramètre contractant d'automorphismes, i.e., les translations de $\mathbf{R}^n$ sont remplacées par les translations à gauche du groupe, les homothéties fixant l'origine par un groupe $e^{t\alpha}$ d'automorphismes, où α est une dérivation de l'algèbre de Lie dont les valeurs propres ont une partie réelle négative. Noter que si un groupe de Lie N admet une telle dérivation, alors N est nécessairement nilpotent gradué.

1.4. Exemple. Un sous-ensemble $Y \subset X$ hérite d'une structure quasiconforme induite. Ses "boules" sont les traces sur Y des "boules" de X "centrées" sur Y, i.e., telles que $kB \cap Y \neq \emptyset$ pour tout $k > 0$.

1.5. Exemple. Soit M une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure négative ou nulle. Fixons un point ξ de M ou de sa sphère à l'infini ∂M. On appelle *ombre portée* depuis le point ξ d'une partie A de M l'ensemble des extrémités des rayons géodésiques issus de ξ rencontrant A. On la *note* $O_\xi A$. Fixons aussi un réel positif R.

Sur $X = \partial M \setminus \xi$, considérons les ombres portées depuis le point ξ des boules de M de rayon R.

Soit B l'ombre portée de la boule $B(m, R)$. Etant donné $k > 0$, soit m' le point de la géodésique passant par ξ et m situé à distance $\log k$ de m (entre ξ et m si $k > 1$, au-delàsi $k < 1$). On pose $kB = O_\xi B(m', R)$.

Enfin, notant θ la fonction distance à ξ (respectivement une horofonction relative à ξ), soit β_n l'ensemble des ombres portées des boules $B(x, R)$ telles que $\theta(x) > \log n$.

On a défini ainsi une structure quasiconforme $\mathrm{Conf}(\xi, R)$ sur $\partial M \setminus \xi$.

1.6. Remarque. Lorsque la courbure sectionnelle est strictement négative, et le groupe d'isométries transitif, on obtient au moins une structure quasiconforme du type de celles décrites dans l'exemple 1.3.

En effet, le groupe d'isométries fixe un point ξ de ∂M (à moins que M soit symétrique; dans ce cas n'importe quel point ξ fait l'affaire). Un sous-groupe nilpotent N du groupe d'isométries est simplement transitif sur $\partial M \setminus \xi$. Un sous-groupe à un paramètre $e^{t\alpha}$ d'isométries normalise N et induit sur N des automorphismes contractants, voir [7].

Nous en venons au point crucial: la structure $\mathrm{Conf}(\xi, R)$ ne dépend pas vraiment des paramètres ξ et R. Nous le montrons dans deux cas: lorsque la courbure est pincée entre deux constantes négatives (paragraphes 1.7 à 1.11), ou lorsque M a un groupe cocompact d'isométries (Proposition 1.12).

Les trois lemmes qui suivent expriment l'idée que, sur une géodésique, la fonction distance à une autre géodésique est d'autant plus convexe que la courbure est plus négative.

1.7. Lemme. *Soit M une variété simplement connexe à courbure $K \leq -b^2 < 0$. Soient γ, γ' deux géodésiques issues d'un même point. Alors la fonction*

$$t \mapsto \frac{\operatorname{sh} bd\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)/2}{\operatorname{sh}(bt)}$$

est croissante pour $t > 0$.

Notons $\delta(t) = d\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$. Notons α et β les angles intérieurs en $\gamma(t)$ et $\gamma'(t')$ du triangle $T = \big\{\gamma(0), \gamma(t), \gamma'(t)\big\}$. La dérivée de la fonction δ est

$$\dot{\delta}(t) = \cos\alpha + \cos\beta.$$

Appliquons le théorème de comparaison de Rauch–Alexandrov–Topono-gov. Il existe, en constante $-b^2$ un triangle $\overline{T}$ dont les côtés sont égaux à ceux de T mais dont les angles $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ sont plus grands. La trigonométrie hyperbolique donne

$$\operatorname{th}\left(\tfrac{1}{2}b\delta 2\right) = \operatorname{th}(bt)\cos\overline{\alpha},$$

d'où

$$\dot{\delta}\operatorname{th}(bt) \geq 2\operatorname{th}\left(\tfrac{1}{2}b\delta\right),$$

qui est l'inégalité annoncée. □

1.8. Lemme. *Soit M une variété simplement connexe à courbure $K \leq -b^2 < 0$.* (i) *Soient γ, γ' deux géodésiques issues d'un même point. Pour $t > 0$, la fonction*

$$t \mapsto \frac{\operatorname{sh} bd\big(\gamma(t), \gamma'\big)}{\operatorname{sh}(bt)}$$

est croissante. (ii) *Soient γ, γ' deux géodésiques asymptotes, i.e.,*

$$\lim_{t \to -\infty} d\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big) = 0.$$

Alors la fonction

$$t \mapsto e^{-bt}\operatorname{sh} bd\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$$

est croissante.

Considérons la surface réglée S engendrée par les géodésiques orthogonales à γ' s'appuyant sur γ. Elle est lisse, sauf éventuellement au point commun à γ et γ'. L'équation de Gauss montre que la métrique induite a une courbure inférieure à $-b^2$. Notons S^+ l'une des composantes de $S \setminus \gamma'$. C'est une surface à bord géodésique. On peut construire son double Σ. Sa métrique, de classe C^1 seulement, admet une symétrie σ. Elle peut être approchée par des métriques lisses σ-invariantes à courbure inférieure à $-b^2$. Par conséquent, le théorème de comparaison de Rauch–Alexandrov–Toponogov y est valable, et on peut appliquer le lemme précédent aux géodésiques γ et $\sigma(\gamma)$. Ceci prouve (i). On obtient (ii) par passage à la limite. □

1.9. Lemme. *Soit M une variété simplement connexe à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Considérons un triangle dont deux angles sont aigus. Notons ϕ le troisième angle, s et t les côtés adjacents, H la hauteur. Si $s \leq t$, on a les inégalités*

$$\frac{1}{a}H(\phi, as, at) \leq H \leq \frac{1}{b}H(\phi, bt, bt)$$

et

$$\phi(aH, as, at) \leq \phi \leq \phi(bH, bt, bt)$$

où $H(\phi, s, t)$ (respectivement $\phi(H, S, t)$) sont la hauteur (respectivement l'angle) d'un triangle de comparaison en courbure constante -1. En particulier, on a toujours

$$\mathrm{th}\,(bH) \leq \cos(\tfrac{1}{2}\phi). \tag{1.9}$$

On applique le théorème de comparaison de Rauch–Alexandrov–Toponogov aux deux triangles rectangles déterminés par la hauteur H. On construit deux quadrilatères de comparaison, l'un, $Q(a)$, convexe, dans le plan de courbure constante $-a^2$, l'autre, $Q(b)$, concave, dans le plan de courbure constante $-b^2$ (voir Figure 1).

Les angles de $Q(a)$ étant inférieurs à ceux du triangle initial, on trouve que $H \geq \tilde{H}$, où $\tilde{H}$ est la hauteur, en courbure $-a^2$, d'un triangle ayant deux angles aigus, et le troisième $\tilde{\phi} \leq \phi$. En augmentant $\tilde{\phi}$ jusqu'à ce qu'il vaille ϕ la hauteur augmente, d'où l'inégalité annoncée.

En général, il n'est pas clair que $Q(b)$ ait des angles aigus. C'est surement le cas si $s = t$, car un triangle isocèle a automatiquement ses angles aigus. Le théorème de comparaison s'applique alors et on conclut que $H \leq H(\phi, bt, bt)/b$.

On se ramène à ce cas particulier comme suit:

On se ramène d'abord à la dimension 2, en construisant une surface réglée balayée par une famille de segments dont les extrémités parcourent de façon monotone les côtés s et t, et qui contient le triangle initial. La courbure de S reste inférieure à $-b^2$ et la hauteur augmente.

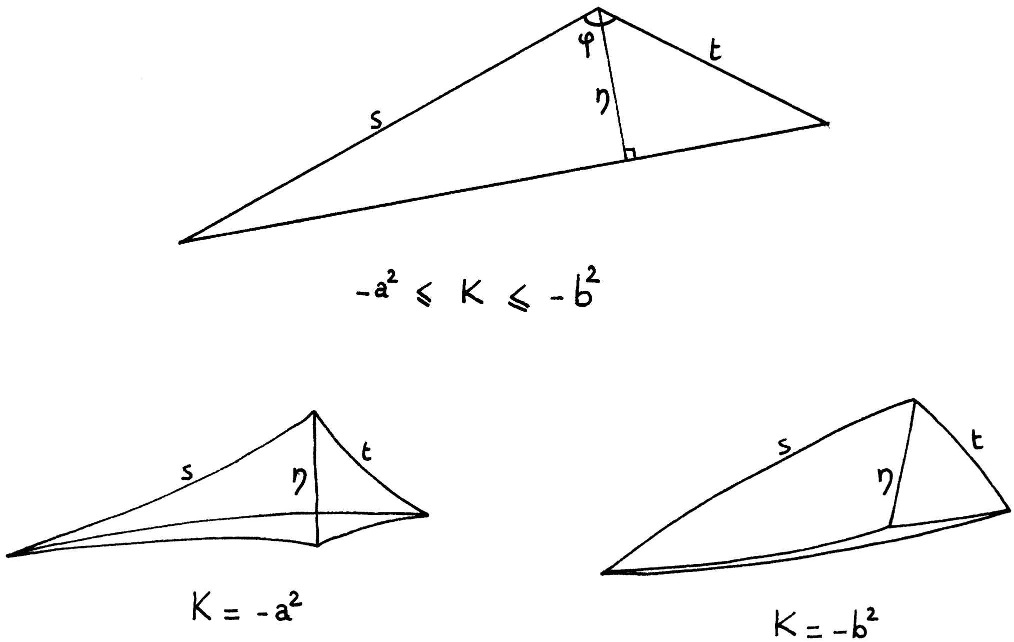

Figure 1.

En dimension 2, lorsqu'on déforme le triangle initial en éloignant le sommet dans le prolongement du côté s, la hauteur augmente, jusqu'à ce que le triangle déformé soit isocèle. On conclut que $H \leq H(\phi, bt, bt)/b$.

Enfin, en courbure constante, la hauteur est maximale pour le triangle ayant deux côtés infinis, d'où (1.9).

On peut donner des formules explicites: la hauteur H divise l'angle ϕ en deux angles aigus ϕ_s et ϕ_t et le triangle donné en deux triangles rectangles. Dans chacun, on utilise la formule de trigonométrie hyperbolique

$$\cos\phi_s = \frac{\operatorname{th}(H)}{\operatorname{th}(s)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\sin\phi &= \sin\phi_s\,\cos\phi_t + \cos\phi_s\,\sin\phi_t\\ &= \frac{\operatorname{th}(H)}{\operatorname{th}(t)}\sqrt{1-\left(\frac{\operatorname{th}(H)}{\operatorname{th}(s)}\right)^2} + \frac{\operatorname{th}(H)}{\operatorname{th}(s)}\sqrt{1-\left(\frac{\operatorname{th}(H)}{\operatorname{th}(t)}\right)^2}.\end{aligned}$$

et $\phi(H, s, t)$ est la plus grande solution de cette équation. □

1.10. Lemme. *Soit M une variété simplement connexe à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Soient $\xi, \xi' \in M \cup \partial M$, $x \in M$ et $R \in]0, \infty[$. Notons $\phi(a, R, t) =$*

$\phi(aR, at, +\infty)$ la fonction de comparaison introduite dans le lemme 1.9. Pour tout $t > R$, pour tout $\psi < \phi(a, R, t)$, il existe des constantes $R'(a, b, R, t, \psi) < +\infty$ et $\tau(a, b, R, t, \psi) < +\infty$ ne dépendant que des bornes sur la courbure, de R, de $t = d(\xi, x)$ et de l'angle ψ sous lequel ξ et ξ' sont vus depuis x telles que, si $t' = d(\xi', x) > \tau$, alors les ombres portées (voir 1.5) satisfassent

$$O_\xi B(x, R) \subset O_{\xi'} B(x, R').$$

Lorsque $t = t' = +\infty$, R et R' et φ sont reliés par les relations suivantes

$$\operatorname{th}(aR) = \cos(\tfrac{1}{2}\phi), \qquad \operatorname{th}(bR') = \cos\bigl(\tfrac{1}{2}(\phi - \psi)\bigr).$$

Soient γ, γ' des géodésiques issues de ξ et ξ', de même extrémité $\chi \in \partial M$. Il s'agit de montrer que, si γ passe à distance R de x, alors γ' passe à distance R' de x. Autrement dit, il faut comparer les hauteurs H et H' des triangles $T = \{x, \xi, \chi\}$ et $T' = \{x, \xi', \chi\}$. Notons ω et ω' les angles en x.

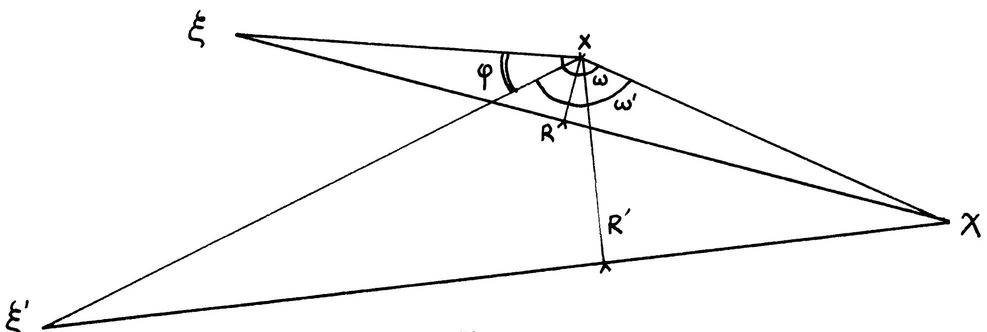

Figure 2.

Par définition de l'ombre portée, l'hypothèse $t > R$ entraîne que l'angle de T en ξ est aigu. On peut donc appliquer le lemme 1.9: l'hypothèse $H \leq R$ entraîne que

$$\omega \geq \phi(aR, at, +\infty) = \phi(a, R, t).$$

Définissons $\tau(a, b, R, t, \psi)$ par l'équation

$$\operatorname{th}(b\tau) = \cos\bigl(\phi(a, R, t) - \psi\bigr),$$

et montrons par l'absurde que, si $t' > \tau$, l'angle en ξ' du triangle T' est aigu.

Si cet angle est obtus, en dèplaçant ξ' sur la géodésique $x\xi'$, on laisse augmenter t' jusqu'à obtenir un triangle rectangle, et on déduit que

$$\operatorname{th}(bt') \leq \cos(\omega') \leq \cos(\omega - \phi)$$

d'où $t' \leq \tau$.

On peut donc appliquer à nouveau le lemme 1.9:

$$\operatorname{th}(bH') \leq \cos(\tfrac{1}{2}\omega') \leq \cos\bigl(\tfrac{1}{2}(\omega - \psi)\bigr),$$

soit $H' \leq R'$ où R' est défini dans l'énoncé. □

1.11. Proposition. *Soit M une variété simplement connexe à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Lorsque $\xi \in M \cup \partial M$ et $R > 0$ varient, les structures quasiconformes* $\mathrm{Conf}(\xi, R)$ *sont deux à deux localement équivalentes.*

Variation du rayon R. On traite le cas où ξ est à distance finie. Si $\xi \in \partial M$, il suffit de remplacer les sinus hyperboliques par des exponentielles. Supposons donnés des nombres positifs R et R_1. Soit γ une géodésique issue de ξ, et $k > 0$. Un petit k-anneau centré sur γ est, par définition, le couple formé par les ombres portées des boules $B(\gamma(s), R)$ et $B(\gamma(s'), R)$, pour s grand, $s' = s + \log k$. D'après le lemme 1.8, on a

$$(*) \qquad O_\xi B(\gamma(t), R) \subset O_\xi B(\gamma(s), R_1)$$

dès que

$$\frac{\mathrm{sh}\,(bt)}{\mathrm{sh}\,(bs)} \geq \frac{\mathrm{sh}\,(bR)}{\mathrm{sh}\,(bR_1)}.$$

Par conséquent, pour que

$$O_\xi B(\gamma(t), R_1) \subset O_\xi B(\gamma(s), R) \subset O_\xi B(\gamma(s'), R) \subset O_\xi B(\gamma(t'), R_1),$$

il suffit de choisir t et t' de façon que

$$\frac{\mathrm{sh}\,(bt)}{\mathrm{sh}\,(bs)} = \frac{\mathrm{sh}\,(bR)}{\mathrm{sh}\,(bR_1)}$$

et

$$\frac{\mathrm{sh}\,(bt')}{\mathrm{sh}\,(bs')} = \frac{\mathrm{sh}\,(bR_1)}{\mathrm{sh}\,(bR_1)}.$$

Lorsque R est grand, il vient

$$\exp b(t' - t) = \exp b(t' - s') \exp b(s' - s) \exp b(s - t) \sim k^b \Big(\frac{\mathrm{sh}\,(bR_1)}{\mathrm{sh}\,(bR)}\Big)^2.$$

On conclut que les structure quasiconformes $\mathrm{Conf}(\xi, R)$ et $\mathrm{Conf}(\xi, R_1)$ sont η-équivalentes, où la fonction η est linéaire,

$$\eta(k) = k \Big(\frac{\mathrm{sh}\,(bR_1)}{\mathrm{sh}\,(bR)}\Big)^{2/b}.$$

Variation du point ξ. Soient γ, γ' deux géodésiques issues de $x \in M$ et faisant un angle ψ. Soient $\xi \in \gamma([-\infty, 0[)$ et $\xi' \in \gamma'([-\infty, 0[)$, et $R > 0$. Soit x' le point de γ' situé à distance $\log k$ de x. Il s'agit de comparer le k-anneau (a, a') formé des ombres portées $O_{\xi'} B(x, R)$ et $O_{\xi'} B(x', R)$ avec des $O_\xi B(y, R)$ pour y

sur γ'. Il suffit de le faire lorsque (a, a') est petit, c'est-à-dire, lorsque $d(\xi, x)$ et $d(\xi', x)$ sont grands et l'angle ψ est petit. Le lemme 1.10 fournit deux rayons R', l'un, noté R_1, tel que

$$O_\xi B(x, R) \subset O_{\xi'} B(x, R_1),$$

l'autre, noté R_2, tel que

$$O_{\xi'} B(x', R_1) \subset O_\xi B(x', R_2).$$

Soit y' la projection orthogonale de x' sur la géodésique ξx, et $\varepsilon = d(x', y)$. Appliquant le lemme 1.8, il vient

$$O_\xi B(x', R_2) \subset O_\xi B(y', R_2 + \varepsilon) \subset O_\xi B(y, R)$$

où $y \in \xi x$ et

$$\exp bd(y', y) \sim \frac{\operatorname{sh}(bR_2 + \varepsilon)}{\operatorname{sh}(bR)}.$$

Lorsque, à k fixé, l'angle ψ tend vers 0, ε tend vers 0 et $bR_1 \sim aR$, $bR_2 = aR_1$. On conclut que, sur $\partial M \setminus \{\xi, \xi'\}$, les structures quasiconformes $\operatorname{Conf}(\xi, R)$ et $\operatorname{Conf}(\xi', R)$ sont η-équivalentes, avec

$$\eta(k) = k\Big(\frac{\operatorname{sh}(bR(a/b)^2)}{\operatorname{sh}(bR)}\Big)^{1/b}. \ \square$$

Nous montrons maintenant qu'en présence d'un gros groupe d'isométrie il n'est plus nécessaire de supposer la courbure strictement négative.

1.12. Proposition. *Soit M une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, sans bandes plates totalement géodésiques. Supposons* $\operatorname{Isom}(M)$ *cocompact. Alors, lorsque ξ décrit ∂M, les diverses structures quasiconformes* $\operatorname{Conf}(\xi, R)$ *sur $\partial M \setminus \xi$ déc ci-dessus (exemple 1.5) sont deux à deux localement équivalentes.*

Variation du rayon R. Soient $R, R' > 0$ et $\xi \in \partial M$. On montre que l'ombre portée, depuis ξ , de toute boule $B(x, R')$ est contenue dans l'ombre portée d'une boule $B(y, R)$ et contient l'ombre porté d'une boule $B(z, R)$, où ξ, y, z sont alignés et $d(y, z)$ est borné indépendamment de ξ. Pour cela, on remarque que, pour x, ξ fixés, il existe des points y et z sur la géodésique de x à ξ que satisfont cette propriété. En effet, l'hypothèse sur les bandes plates entraîne que deux géodésiques asymptotes ont une distance qui tend vers 0. Par conséquent, lorsque y tend vers ξ sur la géodésique ξx, sa distance à toutes les géodésiques qui rencontrent $B(x, R')$ décroît vers 0. La convergence est uniforme par le lemme de Dini, donc

$$O_\xi \overline{B}(x, R') \subset O_\xi B(y, R)$$

pour y assez proche de ξ. De même, lorsque z s'éloigne de ξ sur géodésique ξx, sa distance à toutes les autres géodésiques qui rencontrent $B(x, R')$ croît et tend vers l'infini, donc, pour z assez loin,

$$O_\xi B(x, R') \supset O_\xi \overline{B}(z, R).$$

Notons $\delta(x, \xi)$ la distance minimum entre y et z. Il dépend continûment de x et ξ, donc il est borné car $\mathrm{Isom}(M)$ est cocompact sur les paires (x, ξ), qui s'identifient au fibré unitaire tangent à M.

Variation du centre de projection. Soient $\xi, \xi' \in \partial M$. Il s'agit de montrer que l'ombre portée $O_\xi B(x, 1)$ de toute boule de rayon 1 contient (respectivement est contenue) dans l'ombre portée $O'_\xi B(y, 1)$ (respectivement contient $O_{\xi'} B(z, 1)$) où ξ', y, z sont alignés, et $d(y, z)$ est borné indépendamment de x , pourvu que $O_\xi x$ varie hors d'un voisinage de ξ, ξ'. Pour cela, posons, pour $\xi, \chi \in \partial M$, $x \in M$;

$$\delta(\xi, \chi, x) \;=\; \inf d(y, z)$$

sur les $y, z \in M$ tels que χ, y, z sont alignés et

$$O_\chi B(y, 1) \subset O_\xi B(x, 1) \subset O_\chi B(z, 1).$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, δ est une fonction continue de ξ, χ, x, donc, à x fixé, $\delta(\xi, \chi, x)$ tend vers 0 lorsque l'angle entre ξ et χ, vu de x, tend vers 0. En fait, la convergence est uniforme pour x dans un compact de M. Etant donné un point (m, u, v) de $St_2 M$, i.e., un point m et deux vecteurs tangents u et v en m orthogonaux, et un réel positif r, posons

$$\delta(m, u, v, r) = \delta\big(\exp_m(+\infty u), \exp_m(+\infty v), \exp_m(-ru)\big)$$

Alors $\lim_{r \to +\infty} \delta(m, u, v, r) = 0$ uniformément les compacts de $St_2 M$. En effet, fixons un domaine fondamental compact Δ pour le groupe d'isométries de M. Soit $i = i(m, u, r)$ une isométrie qui ramène $x = \exp_m(-ru)$ dans Δ. Alors

$$\delta(m, u, v, r) = \delta(x', \xi, \chi)$$

où $x' = ix \in \Delta$, $\xi = i\big(\exp_m(+\infty u)\big)$, $\chi = i(\exp_m(+\infty v))$. Or, lorsque $r \to +\infty$, l'angle θ entre ξ et χ vu de x' tend vers 0. En fait, le théorèm donne $tg\theta \leq e^{-r}$ si la courbure sectionnelle satisfait $K \geq -1$. On conclut que la fonction δ est bornée, car le groupe d'isométries de M est cocompact dans $St_2 M$. Ceci prouve que, pour tous ξ et χ, les structures quasiconformes $\mathrm{Conf}(\xi, 1)$ et $\mathrm{Conf}(\chi, 1)$ sont équivalentes, à condition de se limiter aux ombres portées $O_\xi B(x, 1)$ où x est loin de χ au sens suivant: la projection de χ sur la droite (ξ, x) tombe entre ξ et x. □

Remarque. Le fait que δ tende vers 0 à l'infini signifie que, sur ∂M, il y a une géométrie 1-*quasiconforme* et non seulement quasiconforme.

Nous terminons ce paragraphe par deux propriétés supplémentaires des ombres portées, nécessaires en 2.7 et 5.2 respectivement.

Soit M une variété simplement connexe à courbure $K \leq -b^2 < 0$. Fixons $\xi \in M \cup \partial M$ et une horofonction θ relative à ξ (c'est la distance à ξ si $\xi \in M$). Si $B = O_\xi B(x,1)$ est une "boule" de $\partial M \setminus \xi$, on pose $\delta(B) = e^{-\theta(x)}$. Le premier lemme signifie que la fonction δ se comporte approximativement comme le diamètre dans un espace métrique. Le second, que δ est approximativement croissante.

1.14. Lemme. *Si $B = O_\xi B(x,1)$, $B' = O_\xi B(y,1)$ sont des ombres portées de boules, si $B \cap B' \neq \emptyset$ et si $\delta(B') \leq \delta(B)$, alors $B' \subset qB'$ où $q = (5\mathrm{sh}\, b/b)^{1/b}$.*

Traduisons l'énoncé:
- il existe une géodésique γ issue de ξ telle que $d(x,\gamma) \leq 1$ et $d(y,\gamma) \leq 1$;
- $\theta(x) \leq \theta(y)$.

Soit z le point de la géodésique passant par ξ et x tel que $\theta(z) = \theta(x) - b^{-1}\log(5\mathrm{sh}\, b/b)$. Il s'agit de montrer que

$$O_\xi B(y,1) \subset O_\xi B(z,1),$$

i.e., que si γ' est une autre géodésique issue de ξ, et telle que $d(y,\gamma') \leq 1$, alors $d(z,\gamma') \leq 1$.

Soit x' (respectivement y') la projection de x (respectivement y) sur γ. Alors $d(x,x') \leq 1$, $d(y,y') \leq 1$ d'où

$$\theta(y') \geq \theta(y) - 1 \geq \theta(x) - 1.$$

Soit u le point de γ tel que $\theta(u) = \theta(x) - 1$. Par convexité, comme $\theta(u) \leq \theta(y')$,

$$d(u,\gamma') \leq d(y',\gamma') \leq d(y',y) + d(y,\gamma') \leq 2.$$

D'autre part,

$$d(x,u) \leq d(x,x') + |\theta(x') - \theta(x) + 1| \leq 3.$$

On conclut que $d(x,\gamma') \leq 5$. D'après le lemme 1.8,

$$\frac{d(z,\gamma')}{d(x,\gamma')}\frac{b}{\mathrm{sh}\, b} \leq \frac{\mathrm{sh}\left(bd(z,\gamma')\right)}{\mathrm{sh}\left(bd(x,\gamma')\right)} \leq \frac{\mathrm{sh}\left(b\theta(z)\right)}{\mathrm{sh}\left(b\theta(x)\right)} \leq e^{b(\theta(z)-\theta(x))} \leq \frac{1}{5},$$

d'où $d(z,\gamma') \leq 1$. □

1.15. Lemme. *Si B, B' sont des boules de $\partial M \setminus \xi$, alors*

$$B \subset B' \quad \Rightarrow \quad \delta(B) \leq (5\mathrm{sh}\, b/b)^{1/b}\delta(B').$$

En effet, si on avait $\delta(B') = \varepsilon\delta(B)$ avec $\varepsilon < 1/q$, le lemme 1.14 entraînerait $B' \subset q\varepsilon B$, une contradiction. □

2. Module grossier

2.1. Rappel. Soit Γ une famille de courbes rectifiables dans une partie A de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On définit (voir [15]) son *module* $M(\Gamma)$ comme suit:

$$M(\Gamma) = \inf \mathrm{vol}_g(A)$$

sur les métriques riemanniennes g conformes à la métrique euclidienne telles que

$$\mathrm{longueur}_g(\gamma) \geq 1$$

sur toutes les courbes γ dans Γ.

En fait, on autorise dans une classe conforme des "métriques généralisées", de la forme $g = \rho^2\, ds^2$ où ρ est une fonction borélienne positive ou nulle quelconque.

Le module est un invariant conforme au sens suivant: si f est une transformation conforme, alors

$$M\big(f(\Gamma)\big) = M(\Gamma)$$

Soit f un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$. Si f est K-quasiconforme, i.e., si $n \geq 2$ et, en tout point, le Jacobien J_f et la norme de la différentielle df satisfont

$$(*) \qquad |df|^n \leq K J_f,$$

alors, pour tout Γ,

$$K^{-1} M(\Gamma) \leq M\big(f(\Gamma)\big) \leq K^{n-1} M(\Gamma).$$

Les métriques généralisées entrant dans la définition du module servent à le rendre invariant sous les homéomorphismes quasiconformes les plus généraux, i.e., absolument continus sur les droites et admettant presque partout une différentielle qui satisfait $(*)$.

Il est souvent crucial d'avoir une borne inférieure pour le module d'une famille de courbes. Un exemple typique est le suivant.

2.2. Exemple. Soit A un parallélépipède rectangle, soit Γ la famille des segments de droites contenus dans A, parallèles à une arête donnée, de longueur h. Si V désigne le volume de la face perpendiculaire (de façon que $\mathrm{vol}(A) = hV$), on a $M(\Gamma) = Vh^{1-n}$.

En effet, sur chaque segment γ, et pour toute fonction borélienne positive ou nulle ρ, l'inégalité de Hölder donne

$$1 \leq \ \mathrm{longueur}_g(\gamma) = \int_\gamma \rho\, ds \leq \left(\int_\gamma \rho^n\, ds\right)^{1/n} h^{(n-1)/n}$$

d'où, en intégrant sur la base,

$$\mathrm{vol}_g(A) \geq \int_A \rho^n\, dx \geq V\, h^{1-n}.$$

L'égalité est atteinte pour la métrique homothétique $g = 1/h^2\, ds^2$. □

2.3. Généralisation. On peut sortir du cadre riemannien à condition de remplacer volume et longueur par des mesures de Hausdorff. Etant donné un espace métrique (X,d), un réel positif p et une fonction η, on pourrait définir un p,η-module $M^{p,\eta}(\Gamma)$ comme la borne inférieure des mesures de Hausdorff p-dimensionnelles $\mathcal{H}^p_{d'}(X)$ des métriques η-quasiconformes à d (i.e., définissant une structure quasiconforme η-équivalente à celle de d) qui donnent à chaque courbe $\gamma \in \Gamma$ une mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle $\mathcal{H}^1_{d'}(\gamma) \geq 1$.

On a fait ici un autre choix: celui de prendre le terme de "métrique conforme" en un sens plus général.

Etant donnée une structure quasiconforme β, une métrique conforme devient la donnée d'une fonction ϕ qui, à chaque boule B de β, attache un "rayon" $\phi(B)$.

Soit (X,β) un ensemble muni d'une structure quasiconforme. Une partie $a \subset X$ est une k,n-*boule* si (a,a) est un k,n-anneau, i.e., s'il existe une boule B telle que $B \subset a \subset kB \in \beta_n$.

Soit ϕ une fonction positive sur l'ensemble des parties de X. Pour $\ell \geq 1$, une nouvelle fonction sur les parties de X est obtenue en posant

$$\tilde{\phi}_\ell(a) = \sup\{\phi(\tilde{a}) \mid (a,\tilde{a}) \quad \text{est un } \ell\text{-anneau}\}.$$

Soit $p \geq 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$. On *note* $\Phi^{p,k}$ (respectivement $\tilde{\Phi}^{p,k}_\ell$) la mesure obtenue par la construction de Caratheodory (voir [1, paragraphe 2.10]) en sommant ϕ (respectivement $\tilde{\phi}_\ell$) sur les k-boules. Par exemple,

$$\Phi^{p,k} = \lim_{n\to\infty} \Phi^{p,k;n}$$

où, pour $Y \subset X$,

$$\Phi^{p,k;n}(Y) = \inf \sum_i \phi(a_i)^p$$

et la borne inférieure est prise sur les recouvrements dénombrables de Y par des k,n-boules a_i.

Remarquer que $\tilde{\Phi}^{p,k}_\ell$ est une fonction croissante de ℓ et décroissante de p et k.

2.4. Definition. Soit X un ensemble muni d'une structure quasiconforme β. Soit Γ une famille de parties de X, et $p > 1$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, $m \geq 1$ des réels. Le *module grossier* de Γ est la collection des nombres

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma) = \inf \tilde{\Phi}^{p,k}_\ell$$

la borne inférieure étant prise sur les fonctions ϕ telles que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\Phi^{1,m}(\gamma) \geq 1$.

On dira qu'une famille de parties Γ *a un p-module nul* si Γ est une réunion dénombrable

$$\Gamma = \bigcup_{\nu \in \mathbf{N}} \Gamma_\nu$$

et, pour chaque ν, il existe un $k \geq 1$, un $m \geq 1$ et des ℓ arbitrairement grands tels que $M^{p,k,\ell,m}(\Gamma_\nu) = 0$.

2.5. Commentaires. Il est probable que, lorsque X est une variété riemannienne de dimension n et β est la famille des boules, le module grossier $M^{n,k,\ell,m}$ diffère peu du module classique définit au paragraphe 2.1. En tout cas, on a l'inégalité suivante.

$$M^{n,k,\ell,m}(\Gamma) \leq \ell^n M(\Gamma).$$

En effet, le module classique correspond à une borne inférieure prise sur les fonctions ϕ de la forme

$$\phi(B) = \mathrm{vol}_g(B)^{1/n}.$$

En revanche, lorsque l'exposant p est différent de la dimension, le module grossier $M^{p,k,\ell,m}$ n'a rien à voir le p-module défini dans [15].

Dans la définition 2.4, le paramètre p joue le même rôle que dans la notion de mesure de Hausdorff. Au plus une valeur de p peut donner un invariant non trivial, cette valeur représente une sorte de dimension relative de la famille Γ par rapport à la structure quasiconforme β.

Les paramètres k et m reflètent l'idée qu'on minimise sur des métriques k (respectivement m)-quasiconformes à une métrique donnée (cf. 2.3). Ils jouent un rôle mineur.

Le paramètre ℓ sert à compenser une perte intervenant lors de l'estimation 2.9.

L'opération $\phi \mapsto \Phi^p$ n'est pas sous-additive. Par conséquent, le module n'est sans doute pas sous-additif, i.e., il n'est pas clair que $M^{p,k,\ell,m}(\Gamma_1)$ et $M^{p,k,\ell,m}(\Gamma_2)$ permettent de contrôler $M^{p,k,\ell,m}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

2.6. Proposition. *Soient β, β' deux structures quasiconformes η-équivalentes sur X. Pour toute famille Γ de parties de X, pour tout $p \geq 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, $m \geq 1$, on a*

$$M^{p,\eta(k),\ell,m}(\Gamma, \beta) \leq M^{p,k,\eta(\ell),\eta(m)}(\Gamma, \beta').$$

En particulier, β et β' définissent les mêmes familles de module nul.

Soit ϕ une fonction sur les parties de (X, β). Lorsqu'elle sert à mesurer les parties de (X, β'), on la note ψ. Comme une k-boule pour β est une $\eta(k)$-boule pour β', et inversement, on a

$$\Psi^{p,\eta\circ\eta(k)} \leq \Phi^{p,\eta(k)} \leq \Psi^{p,k}.$$

En fait, tout ℓ-anneau pour β est un $\eta(\ell)$-anneau pour β', et inversement, d'où $\tilde{\phi}_\ell \leq \tilde{\psi}_{\eta(\ell)}$, et, par conséquent,

$$\tilde{\Psi}_\ell^{p,\eta\circ\eta(k)} \leq \tilde{\Phi}_{\eta(\ell)}^{p,\eta(k)} \leq \tilde{\Psi}_{\eta\circ\eta(\ell)}^{p,k}. \ \square$$

On va donner, en 2.9, une estimation de module qui traduit, dans le langage des mesures de Hausdorff, l'argument donné en 2.2. On aura besoin d'une propriété de recouvrement, qui nécessite une hypothèse supplémentaire sur la structure quasiconforme.

2.7. Définition. Une *bonne* structure quasiconforme sur un ensemble X est une structure quasiconforme qui satisfait les conditions suivantes:

(a) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \beta$ telle que

$$x \in \bigcap_{k>0} kB;$$

(b) il existe une constante q et une fonction δ sur β telles que, pour tout $k > 0$ et pour toutes boules B, $B' \in \beta$ assez petites, $\delta(kB) = k\delta(B)$ et

$$B \cap B' \neq \emptyset, \quad \delta(B) \leq \delta(B') \quad \Rightarrow \quad B \subset qB'.$$

Remarquer qu'il s'agit d'une propriété de la classe d'équivalence de β. Elle est satisfaite dans tous les exemples considérés jusqu'ici:

- avec $q = 3$ pour les espaces métriques;
- avec $q = (5\mathrm{sh}\, \mathrm{b}/b)^{1/b}$ sur la sphère à l'infini d'une variété à courbure $K \leq -b^2$ (lemme 1.14); ce cas inclut les groupes nilpotents, exemple 1.3;
- cette propriété est transmise aux sous-ensembles.

2.8. Lemme ([1, p. 143]). *Soit X un ensemble muni d'une bonne structure quasiconforme β, et soit $Y \subset X$. De tout recouvrement de Y par des boules de β assez petites, on peut extraire une sous-famille disjointe B_i. telle que les boules concentriques qB_i recouvrent encore Y.*

2.9. Proposition. *Soit (X, β) un ensemble muni d'une bonne structure quasiconforme (cf. 2.7). Soit Γ une famille de parties de X munie d'une mesure positive $d\gamma$. Pour $\gamma \in \Gamma$, soit m_γ une mesure positive de masse ≤ 1 sur γ. Soit $p > 1$. On fait l'hypothèse suivante:*

(c) *il existe des constantes r, τ telle que, pour toute boule B de β assez petite,*

$$\int_{\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma\cap B\neq\emptyset\}} m_\gamma(\gamma \cap rB)^{1-p}\, d\gamma \leq \tau.$$

Alors, pour tout $k \geq 1$ et toute fonction ϕ sur les parties de X, on a

$$\tilde{\Phi}_{qrk}^{p,k}(X) \geq \frac{1}{\tau} \int_\Gamma \Phi^{1,1}(\gamma)^p\, d\gamma.$$

En particulier, le module $M^{p,k,\ell,m}(\Gamma)$ est non nul pour tout $k \geq 1$, $\ell \geq qrk$, $m \geq 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit a_i un recouvrement de X par des k, n-boules, i.e., il existe des boules B_i telles que

$$B_i \subset a_i \subset kB_i \in \beta_n.$$

Chaque $\gamma \in \Gamma$ est recouvert par les boules rkB_i telles que a_i rencontre γ. Utilisons le lemme de recouvrement 2.8. Choisissons une sous-famille a_i, $i \in I_\gamma$, telle que les rkB_i soient deux à deux disjointes, et les $qrkB_i$ recouvrent γ. Par construction, pour $i \in I_\gamma$, $kB_i \cap \gamma \neq \emptyset$. Par définition, $\phi(qrkB_i) \leq \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)$.

Notons

$$1_i(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in I_\gamma; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme les boules $qrkB_i$ recouvrent γ, on a

$$\Phi^{1,1;n'(qr,n)}(\gamma) \leq \sum_{i \in I_\gamma} \phi(qrkB_i) = \sum_i 1_i(\gamma)\phi(qrkB_i) \leq \sum_i 1_i(\gamma)\tilde{\phi}_{qrk}(a_i).$$

Avec l'inégalité de Hölder, il vient,

$$\begin{aligned}
&\Phi^{1,1;n'(qr,n)}(\gamma)^p \\
&\qquad \leq \Big(\sum_i 1_i(\gamma)\tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p m_\gamma(rkB_i \cap \gamma)^{1-p}\Big)\Big(\sum_i m_\gamma(rkB_i \cap \gamma)\Big)^{p-1} \\
&\qquad \leq \sum_i 1_i(\gamma)\tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p m_\gamma(rkB_i \cap \gamma)^{1-p}
\end{aligned}$$

car les $rkB_i \cap \gamma$ sont deux à deux disjointes et $m_\gamma(\gamma) \leq 1$. En intégrant, il vient

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \Phi^{1,1;n'(qr,n)}(\gamma)^p \, d\gamma &\leq \sum_i \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p \int_\Gamma 1_i(\gamma) m_\gamma(rkB_i \cap \gamma)^{1-p} \, d\gamma \\
&\leq \tau \sum_i \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p.
\end{aligned}$$

Comme $\Phi^{1,1;n'(qr,n)}(\gamma)$ croît avec n, l'intégrale de gauche converge vers l'intégrale $\int \Phi^{1,1}(\gamma)\Phi^{1,1}(\gamma)^p \, d\gamma$, d'où l'inégalité annoncée.

On a donc montré que, pour tout $k \geq 1$,

$$M^{p,k,qrk,1} \geq \frac{1}{\tau} \int_\Gamma d\gamma > 0.$$

On conclut en remarquant que $M^{p,k,\ell,m}$ est une fonction

- croissante de ℓ et m,
- décroissante de p et k. □

2.10. Exemple. Les hypothèses de la proposition 2.9 sont satisfaites dans le cas suivant. Dans l'espace euclidien muni de sa structure quasiconforme standard on considère la trace, dans le cube unité, d'une famille de d-plans parallèles à une d-face. Dans les hypothèses de la proposition 2.9, on peut prendre $q = 3$ et $r > 1$ quelconque. Il vient alors, indépendamment de k, $\ell > 3k$, m,

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } p < n/d; \\ 0, & \text{si } p > n/d, \end{cases}$$

et est fini et non nul si $p = n/d$.

Plus généralement, on peut traiter le cas d'un groupe nilpotent muni d'un automorphisme e^{α} semi-simple, dont toutes les valeurs propres sont réelles supérieures à 1. Soit C un polyèdre convexe de l'algèbre de Lie dont les faces sont des sous-espaces α-invariants. La structure quasiconforme β est constituée des images de $\exp C$ par translations et homothéties (i.e., le groupe à un paramètre d'automorphismes engendré par α). On fixe un vecteur propre v de α dans l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$, $\alpha(v) = \lambda v$, et un borélien F, de mesure de Lebesgue finie et non nulle, dans un supplémentaire de v dans $\mathcal{N}$. On pose

$$\Gamma = \{\gamma_w \mid w \in F\}, \qquad \gamma_w = \{\exp(w)\exp(sv) \mid 0 \leq s \leq 1\}.$$

La mesure $d\gamma$ sur Γ est obtenue comme suit: Si ω désigne la forme volume *biinvariante*, la forme $i_v\omega$ est fermée donc basique, elle définit une mesure $d\gamma$ sur l'espace des orbites, invariante par les translations à gauche, homogène de degré $\mathrm{tr}(\alpha) - \lambda$ sous les homothéties $e^{t\alpha}$. En particulier, l'hypothèse (c) est satisfaite pour tout $r > 1$ avec $p = \mathrm{tr}(\alpha)/\lambda$.

Comme dans le cas euclidien, on trouve un module nul, fini et non nul, infini, suivant que p est strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à l'exposant critique $\mathrm{tr}(\alpha)/\lambda$.

Enfin, on peut admettre des valeurs propres complexes. On écrit $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2$ où α_1 a ses valeurs propres réelles positives, α_2 est une isométrie pour une norme euclidienne $|\cdot|$ sur l'algèbre de Lie qui rend les espaces propres de α_1 orthogonaux, α_1 et α_2 commutent. On prend pour C la boule unité $\{v; |v| = 1\}$ et on demande que v soit seulement un vecteur propre de α_1. L'exposant critique est $\Re e\, \mathrm{tr}(\alpha)/\lambda$, où $\alpha_1(v) = \lambda v$.

2.11. Sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$. Soit Z un sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n-1}$, de dimension de Hausdorff d. Considérons le sous-ensemble $Y = \mathbf{R} \times Z$ de $\mathbf{R}^n$, muni de la structure conforme induite (boules métriques), et la famille de courbes Γ formée des droites $\mathbf{R} \times \{x\}$, $x \in Z$. Soit μ une mesure positive sur Z. On en déduit une mesure sur Γ. Supposons qu'il existe une constante C telle que, pour toute boule de rayon r,

$$\mu(B(r)) \leq C\, r^d.$$

Alors la proposition 2.9 s'applique et on conclut que

$$M^{d+1,k,\ell,m}(\Gamma) > 0$$

pour tous $k \geq 1$, $\ell > 3k$, $m \geq 1$.

3. Dimension conforme

Désormais, lorsque nous parlerons de structure quasiconforme, nous supposerons que X est un espace topologique, et que les boules sont ouvertes.

3.1. Définition. La *dimension conforme* de (X, β), *notée* $\mathbf{q}(X, \beta)$ est la borne inférieure des réels q tels que le module de la famille Γ de toutes les parties connexes, non réduites à un point, soit nul.

La *dimension à l'infini* d'une variété simplement connexe M à courbure négative, *notée* $\mathbf{q}(\partial M)$ est la dimension conforme de la sphère à l'infini ∂M munie de l'une des structures quasiconformes $\mathrm{Conf}(\xi, R)$.

Au paragraphe 2, on a établi des minorations de modules. Voici une majoration de module qui permet souvent de calculer des dimensions conformes.

3.2. Proposition. *Lorsque (X, β) est un espace métrique non totalement discontinu, sa dimension conforme est inférieure ou égale à sa dimension de Hausdorff.*

En effet, considérons la famille Γ de tous les connexes non réduits à un point. Fixons $\alpha < 1$. Posons, pour $a \subset X$,

$$\phi(a) = \text{diamètre}\,(a)^{\alpha}.$$

Alors, pour tout $m \geq 1$, $\Phi^{1,m} \geq \mathcal{H}^{\alpha}$ est infini sur tous les éléments de Γ. D'autre part, pour tout $\ell \geq 1$, $\tilde{\phi}_\ell \leq \ell\phi$. On a donc

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma) \leq \tilde{\Phi}_\ell^{p,k}(X) \leq \ell^p \Phi^{p,k}(X) \leq \ell^p \Phi^{p,1}(X) \leq (2\ell)^p \mathcal{H}^{\alpha p}(X)$$

qui est nul si αp est strictement supérieur à la dimension de Hausdorff. □

3.3. Exemple. Soit X un groupe de Lie nilpotent muni d'un automorphisme contractant e^{α}, soit β la structure quasiconforme correspondante, telle qu'elle est décrite au paragraphe 1.3. Si $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont les parties réelles des valeurs propres de la dérivation α sur l'algèbre de Lie, alors la dimension conforme est

$$q(X, \beta) = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_1}.$$

En effet, on a décrit en 2.10 une famille de courbes sur X de module non nul pour cette valeur de l'exposant, d'où $\mathbf{q}(X, \beta) \geq (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/\lambda_1$. Inversement, dans de nombreux cas, comme ceux décrits au paragraphe 3, la structure quasiconforme β est constituée des boules d'une métrique dont la dimension de Hausdorff est exactement $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/\lambda_1$. L'inégalité inverse résulte alors de la proposition 3.2.

En général, on raisonne comme suit. Notons d la métrique riemannienne invariante à gauche sur le groupe N obtenue à partir de la norme sur l'algèbre de Lie introduite en 2.10. Dans la définition 1.3 de la structure quasiconforme, on prend pour B_0 la boule unité $B_d(0,1)$. On a alors, pour tout t,

$$e^{t\alpha}(B_0) \subset B_{d'}(0, e^{\lambda_1 t}).$$

Fixons un $\varepsilon < 1$. Dans la définition du module, posons

$$\phi\big(e^{t\alpha}(B_0)\big) = e^{\varepsilon\lambda_1 t}.$$

Il vient, pour tout connexe non trivial γ,

$$\Phi^{1,m}(\gamma) \geq \mathcal{H}^{\varepsilon}(\gamma) = +\infty.$$

Or la mesure $\tilde{\Phi}_\ell^{q,k}$ est finie pour $q = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/\lambda_1$, car

$$\mathrm{vol}(e^{t\alpha}(B_0)) = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t}.$$

Par conséquent, pour tout $p > q$ la famille des connexes non triviaux Γ a un module nul, d'où $q \geq \mathbf{q}(X, \beta)$. □

3.4. Exemple. Soit Y un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ de la forme $\mathbf{R} \times Z$, où dimension de Hausdorff égale à d. Sous les hypothèses du paragraphe 2.9, i.e., il existe une constante C et une mesure positive μ telle que $\mu\big(B(x,r)\big) \leq C\,r^d$, la dimension conforme de Y coincide avec sa dimension de Hausdorff, i.e., $\mathbf{q}(Y) = d+1$.

4. Plongements quasiconformes

Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On dira qu'une bijection $f : (X', \beta') \to (X, \beta)$ entre ensembles muni de structure quasiconformes est η-*quasiconforme* si $f^{-1}\beta$ est η-équivalente à β'.

Par définition, la dimension conforme est préservée par les transformations quasiconformes. Mais il est utile de savoir comment la dimension conforme se comporte sous des applications non nécessairement surjectives.

4.1. Définition. Soit $f : X' \to X$ une application entre ensembles munis de structures quasiconformes β' et β. Soit $s > 1$. On note

$$\beta^s = \big\{sB \mid B \in \beta', f^{-1}(B) \neq \emptyset\big\}.$$

Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et $s > 1$.

L'application $f : X' \to X$ est un *plongement* η, s*-quasiconforme* si
(1) pour tout B_1, $B_2 \in \beta^s$,

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \quad \Rightarrow \quad \ell B_1 \subset \eta(\ell) B_2;$$

(2) $f^{-1}\beta^s$ est η-équivalente à β.

On dit que f est un *plongement quasiconforme* si, pour tout $R > 0$, il existe des données η, s avec $s > R$ telles que f soit un plongement η, s-quasiconforme.

4.2. Remarques. Nous renvoyons aux articles [14] et [16] qui clarifient les liens entre les diverses définitions. Dans le cas des espaces métriques, notre définition consiste à supposer que $f : X \to X'$ et $f^{-1} : f(X') \to X'$ sont localement quasisymétriques au sens de [14], ou quasimöbius au sens de [16]. Dans le cas où X' est un ouvert de $\mathbf{R}^p$, $X = \mathbf{R}^n$, $p \leq n$, un plongement quasisymétrique est automatiquement quasiconforme en notre sens ([14, Theorem 3.22]).

La raison pour laquelle on introduit les sous-familles β^s est que, en général, $f^{-1}(\beta)$ n'est η-équivalente à aucune structure quasiconforme raisonnable, car certaines de ses boules sont vides.

On a défini en 2.11 la structure quasiconforme induite $\beta_{|Y}$ sur un sous-ensemble Y de (X, β). L'injection $Y \subset X$ n'est pas automatiquement un plongement quasiconforme. C'est tout de même le cas lorsque Y est connexe et X a une bonne structure quasiconforme, i.e., pour tous les exemples considérés, voir 2.7.

4.3. Lemme. *Soit $f : X' \to X$. Si β est une bonne structure quasiconforme (cf. 2.7) et si l'espace de départ X' est connexe, alors f est un plongement quasiconforme si et seulement si f est η-quasiconforme de X' sur $f(X')$ muni de la structure conforme induite.*

(1) Soient B_1, $B_2 \in \beta^s$ telles que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Supposons B_2 assez petite pour qu'elle ne contienne pas $f(X')$. Comme $f^{-1}(s^{-1}B_1) \neq \emptyset$, on a

$$\frac{1}{s} B_1 \cap B_2 \neq \emptyset.$$

Supposons $s > q$, où q est la constante intervenant dans la définition d'une bonne structure quasiconforme. Si on avait

$$\delta(B_2) < \delta\Big(\frac{1}{s} B_1\Big),$$

on aurait $B_2 \subset qs^{-1}B_1 \subset\subset B_1$, ce qui est exclu si X' est connexe. On a donc, pour tout $\ell \geq 1$,

$$\delta(\ell B_1) \leq \delta(s\ell B_2),$$

d'où, comme $\ell B_1 \cap s\ell B_2 \neq \emptyset$,

$$\ell B_1 \subset qs\ell B_2.$$

(2) Soit $B \in \beta^s$, avec $s > q$. Par hypothèse, on peut choisir un point $x \in f(X') \cap s^{-1}B$ et une boule $\tilde{B}$ centrée en x. Soit B' la boule concentrique telle que

$$\delta(B') = \delta\Big(\frac{1}{s}B\Big).$$

Comme $s^{-1}B \cap B' \neq \emptyset$, on a $B' \subset qs^{-1}B \subset B$. De même, comme $kB \cap skB' \neq \emptyset$, on a $kB \subset qskB'$. On a montré que β^s est η-équivalente à $\beta_{|f(X')}$ avec $\eta(k) = qsk$. □

4.4. Lemme. *Soit $f : X' \to X$ un plongement η, s-quasiconforme. Soit Γ une famille de parties de X'. On a, pour tout $p > 0$, $k' \geq \eta(1)$, $k \geq 1$, $\ell' \geq 1$, $\ell \geq ks\eta \circ \eta(\ell')$, $m \geq 1$,*

$$M^{p,k',\ell',m}(\Gamma) \leq M^{p,k,\ell,\eta(m)}\big(f(\Gamma)\big).$$

Soit ϕ une fonction sur les parties de X. Pour $a' \subset X'$, posons

$$\psi(a') = \inf\{\phi(B) \mid B \in \beta^s,\, f(a') \subset B\}.$$

Comparons les fonctions $\tilde{\psi}_{\ell'}$ et $\tilde{\phi}_{\ell}$. Soit a un k-anneau de X rencontrant $f(X')$, i.e., $B \subset a \subset kB$. La boule ksB est dans β^s donc $a' = f^{-1}(ksB)$ est une k'-boule relativement à β', $k' = \eta(1)$. Soit $\tilde{a}' \subset X'$ un sous-ensemble tel que $(a', \tilde{a}')$ soit un ℓ'-anneau de X', i.e., pour un $B' \in \beta'$, $B' \subset a' \subset \tilde{a}' \subset \ell' B$. Comme $f^{-1}\beta^s$ est η-équivalente à β', il existe $B'' \in \beta^s$ telle que

$$f^{-1}(B'') \subset B' \subset a' \subset \tilde{a}' \subset \ell' B \subset f^{-1}\big(\eta(\ell')B''\big).$$

Appliquons l'hypothèse (1) aux boules ksB et B'': il vient

$$\eta(\ell')B'' \subset \eta \circ \eta(\ell')ksB,$$

donc $\big(a, \eta(\ell')B''\big)$ est un ℓ-anneau de X, $\ell = ks\eta \circ \eta(\ell')$. On conclut que

$$\psi(\tilde{a}') \leq \phi(\ell B) \leq \tilde{\phi}_{\ell}(a);$$

autrement dit, étant donné une k-boule a de X, on a construit une k'-boule a' de X' telle que $f^{-1}(a) \subset a'$ et

$$\tilde{\psi}_{\ell'}(a') \leq \tilde{\phi}_{\ell}(a).$$

Soit $\{a_i\}$ un recouvrement de $f(X')$ par des k-boules. Appliquons la construction précédente: on obtient un recouvrement de X' par des k'-boules, et on conclut que

$$\tilde{\Psi}^{p,k'}_{\ell'}(X') \leq \tilde{\Phi}^{p,k}_{\ell}\big(f(X')\big).$$

Comme on a toujours, pour tout $\gamma \subset X'$,

$$\Psi^{1,m}(\gamma) \geq \Phi^{1,\eta(m)}\big(f(\gamma)\big),$$

on obtient l'inégalité annoncée. □

4.5. Corollaire. *La dimension conforme augmente dans les plongements quasiconformes, i.e., s'il existe un plongement quasiconforme de* (X', β') *dans* (X, β), *alors*

$$\mathbf{q}(X', \beta') \le \mathbf{q}(X, \beta).$$

Nour décrivons maintenant deux situations où apparaissent des plongements quasiconformes, un exemple de groupe quasiconforme dû à P. Tukia (paragraphes 4.8 à 4.12) et les plongements quasiisométriques (paragraphes 4.14 à 4.17).

4.6. Groupes quasiconformes. Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Soit X un ensemble muni d'une structure quasiconforme β. Soit G un groupe de transformations uniformément η-quasiconformes de X. On dit que G est *transitif* sur la structure quasiconforme β si, étant donné deux boules B_1, $B_2 \in \beta$ et $k \ge 1$, il existe un élément g de G tel que

$$B_1 \subset g(B_2) \subset g(kB_2) \subset \eta(k) B_1.$$

Il est clair que, si deux structures quasiconformes sur X admettent le même groupe transitif de transformations, elles sont équivalentes (sous des hypothèses évidentes).

4.7. Exemple. Soit M une variété simplement connexe à courbure négative et G un groupe cocompact d'isométries de M. Alors G est transitif sur la structure quasiconforme de la sphère à l'infini ∂M. En effet, l'espace des "boules" de ∂M s'identifie au fibré unitaire tangent à M, sur lequel le groupe d'isométries G est cocompact.

Etant donné deux variétés M et M' munies de groupes cocompacts G et G' isomorphes, il existe un homéomorphisme $f : \partial M \to \partial M'$ qui conjugue les actions de G et G' (G.D. Mostow). Cet homéomorphisme est donc automatiquement quasiconforme. Plus généralement, on dit que $f : \partial M \to \partial M'$ est G-quasiconforme s'il existe un ensemble compact Δ d'homéomorphismes de $\partial M'$ tel que $f \circ G \subset G' \circ \Delta$. L'extension aux sphères à l'infini d'une quasiisométrie a cette propriété, voir 4.15. De nouveau, G-quasiconforme entraîne quasiconforme au sens ci-dessus (la réciproque est vraie dans le cas de l'espace hyperbolique). Ce point de vue est développé dans [10].

4.8. Exemple. Dans [13], P. Tukia construit, pour tout $n \ge 3$ un groupe H de transformations uniformément quasiconformes de la sphère standard S^n. L'algèbre de Lie de H est l'extension de l'algèbre abélienne $\mathbf{R}^{n-1}$ par la dérivation α dont la matrice est

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{pmatrix},$$

où $\tau = \log 4 / \log 3$.

L'action de H sur la sphère S^n a trois orbites, deux disques bordés par une sphère S. Le sous-groupe $\mathbf{R}^{n-1}$ de H est simplement transitif sur le complémentaire d'un point ∞ dans S. Ceci définit un homéomorphisme

$$f : \mathbf{R}^{n-1} \to S \setminus \{\infty\}$$

qui conjugue les actions de H sur $\mathbf{R}^{n-1}$ et $S \setminus \{\infty\}$.

D'après [7], le groupe H admet une métrique invariante à gauche à courbure sectionnelle négative. Il a donc une sphère à l'infini ∂H, qui porte une structure quasiconforme. Le groupe $\mathbf{R}^{n-1}$ est simplement transitif sur le complémentaire d'un point dans ∂H. La structure quasiconforme induite β est décrite dans l'exemple 1.3. Ses boules sont les images d'une boule unité B_0 par les éléments de H.

Le fait que l'action de H dans S^n soit uniformément quasiconforme entraîne que l'application $f : \partial H \setminus \infty \to S \setminus \infty$ est quasiconforme. En effet, soit $\beta_{|S}$ la structure quasiconforme induite, i.e., formée des boules euclidiennes centrées sur $S \setminus \infty$. Il suffit de vérifier que le groupe H est transitif sur $\beta_{|S}$, or il est transitif sur les centres, et le stabilisateur d'un point contient une homothétie de rapport 3.

On conclut grâce au lemme 1.14 que f est un plongement quasiconforme.

La sphère singulière S figurant dans l'article de P. Tukia a une dimension conforme égale à $n - 1 + \log 4/\log 3$. On le voit, ou bien directement en utilisant la description explicite de $S = \mathbf{R}^{n-2} \times Z$ où Z est une courbe fractale dans le plan (et le paragraphe 3.4), ou bien indirectement en utilisant l'homéomorphisme quasiconforme avec la sphère à l'infini ∂H, et le paragraphe 3.3.

En particulier, S n'est pas quasiconforme à une sphère S^{n-1} au sens de la définition 4.1, donc n'est l'image de $S^{n-1} \subset S^n$ par aucune transformation quasiconforme de S^n. Par des considérations somme toute très proches de [17], on retrouve un résultat de P. Tukia: le groupe $\mathbf{R}^{n-1}$ agissant sur S^n n'est pas conjugué par une transformation quasiconforme à un sous-groupe du groupe de Möbius.

Maintenant, nous montrons que certains traits du groupe quasiconforme de P. Tukia sont communs à tous les groupes quasiconformes qui lui sont algébriquement semblables. La structure du groupe G force la structure des orbites, en particulier, il y a un point fixe, et les autres orbites ont un petit groupe d'isotropie.

On considère des groupes de Lie $G = \mathbf{R} \times N$ où N est nilpotent, et $\mathbf{R}$ agit par un automorphisme contractant $e^{t\alpha}$. Alors G s'identifie au groupe de difféomorphismes de N engendré par les translations à gauche et les $e^{t\alpha}$. On suppose donnée une action fidèle de G sur la sphère S^ν par transformations uniformément quasiconformes.

On utilise la classification des éléments de G en elliptiques, paraboliques et loxodromiques, voir [2]. Par définition, les éléments elliptiques engendrent un groupe relativement compact d'homéomorphismes de S^ν. Il n'y en a donc pas dans G, qui n'a aucun tel sous-groupe. Les éléments paraboliques (respectivement loxodromiques) ont exactement un (respectivement deux) points fixes, et leur action est dissipative en dehors du ou des points fixes. En particulier, une mesure finie invariante par une telle transformation est concentrée aux points fixes. Or le groupe G étant moyennable, il laisse une mesure finie invariante sur S^ν. Celle-ci est concentrée en au plus deux points. Le lemme suivant montre qu'il n'y a qu'un point dans le support, et on conclut que G fixe un point, noté désormais ∞, dans S^ν.

4.9. Lemme. *Le sous-groupe de G qui fixe deux points donnés sur S^ν est contenu dans un groupe à un paramètre.*

Notons H un tel sous-groupe. Soient g et h deux éléments de H, soit Δ un domaine fondamental compact pour g dans le complémentaire des deux points. Fixons $x \in \Delta$. Pour tout entier m, il existe un m' tel que

$$h^{m'} \circ g^m(x) \in \Delta.$$

Alors $h^{m'} \circ g^m$ décrit une partie relativement compacte du groupe des homéomorphismes de S^ν, et donc, une partie bornée du groupe de Lie G. Or ceci n'est possible, dans un groupe de Lie à courbure négative, que si les groupes à un paramètre engendrés par g et h coincident. En effet, munissons G d'une métrique riemannienne invariante à courbure négative. Si $h, h' \notin N$, alors h et h' préservent chacun une géodésique, nécessairement la même. Il existe alors un $t \in \mathbf{R}$ tel que $h^t \circ h'$ ait un point fixe sur cette géodésique, cela entraîne que $h' = h^{-t}$. Si $h \notin N$ et $h' \in N$, alors h translate une géodésique d'une longueur $c > 0$, et h' préserve une horofonction θ telle que $\theta \circ h = \theta + c$, c'est incompatible avec l'hypothèse. Il reste le cas où $h, h' \in N$, qui fait l'objet de la scholie suivante. □

4.10. Scholie. *Soit N un groupe de Lie nilpotent, muni d'une métrique invariante à gauche. Soit $h \in N$, et H un sous-groupe à un paramètre. Si les puissances de h se trouvent à distance bornée de H, alors $h \in H$.*

On raisonne par récurrence sur la dimension. La propriété cherchée est claire pour les groupes abéliens. Soit K un sous-groupe de N contenu dans le centre. La projection de N sur N/K (muni d'une métrique invariante à gauche idoine) diminue les distances, d'où, par récurrence, $h = ab$ avec $a \in H$ et $b \in K$. Supposons $a \notin K$. Par hypothèse, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, il existe m' tel que $h^m a^{m'}$ soit borné, or

$$h^m a^{m'} = a^{m+m'} b^{m'}$$

donc, dans N/K, $[a]^{m+m'}$ est borné, et $m + m'$ est borné. On déduit que $b^{m'}$ est borné, soit $b = 1$, et $h \in H$. Si $a \in K$, c'est que $h \in K$ et on élimine ce cas par un choix judicieux de K. □

4.11. Corollaire. *Le sous-groupe N agit librement sur $S^\nu \setminus \{\infty\}$.*

En effet, supposons que N contienne un élément loxodromique g. Soit $h \neq 1$ un élément non nul du centre. Comme $hg = gh$, h a les mêmes points fixes que g, donc g et h se trouvent dans le même groupe à un paramètre, donc g est dans le centre. En appliquant de nouveau le lemme 4.9, on conclut que $\dim N = 1$. Enfin, si $h \in G \setminus H$, on a $h^{-1}gh = g^{\lambda+1}$, donc h a les mêmes points fixes que g, et on conclut que $\dim G = 1$, c'est absurde. □

4.12. Théorème. *Soit G un groupe de Lie connexe, extension d'un groupe nilpotent N pas une dérivation semi-simple à valeurs propres de partie réelle positive. Supposons que G agisse par transformations uniformément quasiconformes sur la sphère standard S^ν. Alors G a un point fixe commun ∞. S'il a un autre point fixe x, l'orbite Gx a une dimension de Hausdorff supérieure ou égale à la dimension à l'infini de G.*

Vérifions que l'application $f : N \to S^\nu$, $h \to hx$ est un plongement quasiconforme, en fait, une transformation quasiconforme sur son image. D'après le corollaire 4.11, f est injective. Notons β la structure quasiconforme induite sur $f(N)$ par la structure standard de S^ν. Fixons une boule B_0 centrée en x. Notons $B_0' = f^{-1}B_0$ et β' la structure quasiconforme construite à partir de B_0' par application des éléments du groupe G. Alors β et β' sont équivalentes. En effet, l'application f conjugue les actions de G sur N et sur $f(N)$, et le groupe G est transitif par définition sur les boules de β. Il est aussi transitif sur les centres des boules de β'. Enfin, le stabilisateur de x est un groupe à un paramètre d'éléments loxodromiques, dont on connaît la dynamique [2], donc G est transitif sur β.

Par définition, la dimension à l'infini de G est égale à la dimension conforme de β', et donc, à la dimension conforme de β, qui minore sa dimension de Hausdorff (Proposition 3.2). □

4.13. Remarque Est-il possible que G agisse librement sur $S^\nu \setminus \{\infty\}$? Si oui, pour tout y, l'application $f : G \to \mathbf{R}^\nu = S^\nu \setminus \{\infty\}$, $f(g) = gy$ est, en un sens très faible, quasisymétrique: si $g, h, k \in G$ et $d(g,h) = d(g,k) = r$, alors $d\big(f(g), f(h)\big) \leq Hd\big(f(g), f(k)\big)$, où H dépend de r seulement. On sait (voir [10]) que, si $\dim G = \nu$, f ne peut pas être quasiconforme au sens ordinaire.

4.14. Définition. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est un *plongement quasiisométrique* si elle satisfait des inégalités

$$-C + \frac{1}{L}d(x,y) \leq d(fx, fy) \leq Ld(x,y) + C.$$

C'est une *quasiisométrie* si, de plus, son image est C-dense dans Y.

4.15. Proposition. *Un plongement quasiisométrique (respectivement une quasiisométrie) entre des variétés simplement connexes à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$, se prolonge aux sphères à l'infini en un plongement quasiconforme (respectivement une transformation quasiconforme).*

En effet, l'image de toute géodésique de X est contenue dans un voisinage tubulaire de largeur bornée $\tau = \tau(b, C, L)$ d'une géodésique de Y (M. Morse, voir par exemple [11]). Une boule B de β' est, par définition, une ombre portée $O_{\xi'}B(y, R)$. Limitons nous aux boules telles que $O_{\xi'}y \in f(\partial X)$. On le peut, grâce au lemme 1.14. D'après la proposition 1.11, on peut aussi supposer que $\xi' \in f(\partial X)$. Posons $\xi' = f(\xi)$. Alors il existe un $x \in X$ tel que $d(f(x), y) \leq \tau$. On vérifie alors que

$$f^{-1}(O_{\xi'}B(x, R)) \subset O_{\xi}B(x, R_1),$$

où R_1 ne dépend que de R, b, L, C. Si z désigne le point de la géodésique $\xi'y$ situé à distance k de y, il est proche de $f(t)$ où t est situé sur la géodésique ξx, à distance au plus $Lk + C$ de x, d'où

$$O_{\xi}B(t, R_2) \subset f^{-1}(O_{\xi'}B(z, R))$$

pour un $R_2(R, b, L, C)$ positif si R est assez grand. Avec la proposition 1.11, cela prouve que f est un plongement quasiconforme. □

4.16. Corollaire. *Soit N une variété compacte admettant une métrique à courbure négative. Alors la dimension à l'infini $\mathbf{q}(\partial \tilde{N})$ de son revêtement universel est un invariant homotopique de N.*

4.17. Variétés à bord convexe. Supposons que X et Y soient les revêtements universels de variétés compactes N et P. Un homomorphisme de groupes $h : \pi_1(N) \to \pi_1(P)$ même injectif, ne donne pas toujours naissance à un plongement quasiisométrique.

Voici une condition suffisante. Soit M une variété localement symétrique de rang un, compacte, à bord *convexe*, i.e., deux points intérieurs sont reliés par une géodésique ne rencontrant pas le bord. Alors le revêtement universel $\tilde{M}$ s'identifie à une partie convexe d'un espace symétrique X, d'où un homomorphisme h : $\pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(X)$. Cet homomorphisme est quasiisométrique. En effet, si on fixe une origine O dans M, les fonctions

$$\gamma \mapsto d_M(O, \gamma(O))$$

sur $\pi_1(M)$ et

$$i \mapsto d_X(O, i(O))$$

sur $\mathrm{Isom}(X)$ sont équivalentes à des distances algébrique sur $\pi_1(M)$ et riemannienne sur $\mathrm{Isom}(X)$. Or la convexité de M entraîne que $d_M = d_X$.

4.18. Corollaire. *Soit N un quotient compact d'un espace symétrique de rang un $\mathbf{K}H^m$, (voir [9]). Supposons que N ait même type d'homotopie qu'une variété compacte P à bord convexe, à courbure constante. Alors nécessairement*

$$\dim P - \dim N \geq \dim \mathbf{K} - 1,$$

soit 1 *si* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, 3 *si* $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, 7 *si* $\mathbf{K} = \mathbf{Ca}$

Je ne connais pas d'exemple de cette situation. En revanche, M. Gromov et W. Thurston [5] ont construit récemment des variétés compactes à courbure négative (arbitrairement pincée) qui ont même type d'homotopie qu'une variété compacte, à bord convexe, à courbure constante. Ils montrent que ces variétés n'admettent pas de métrique à courbure constante. Il n'est pas clair que ces variétés aient une dimension à l'infini supérieure à $n-1$.

5. Estimations de module grossier en fonction de la courbure

Dans les trois énoncés qui suivent, M désigne une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle $K \leq -b^2 < 0$. On munit la sphère à l'infini ∂M d'une structure quasiconforme $\mathrm{Conf}(\xi, 1)$. On désigne par θ la fonction distance au point ξ, si $\xi \in M$, ou bien une horofonction relative à ξ si $\xi \in \partial M$. On attache à l'ombre portée B d'une boule $B(x,1)$ le "rayon" $\phi(B) = e^{-\theta(x)}$ (c'est la fonction déjà considérée en 1.14). A une partie quelconque a de $\partial M \setminus \xi$, on attache le "diamètre"

$$\phi(a) = \inf_{a \subset B} \phi(B).$$

5.1. Lemme. *Pour tout compact σ dans $\partial M \setminus \xi$, qui se projette en σ_s sur la sphère (respectivement l'horosphère) $\{\theta = s\}$, on a, pour tout $q > 0$, $m \geq 1$,*

$$\mathcal{H}^q(\sigma_s) \leq (2\mathrm{sh}\, b/b)^q e^{qbs}\, \Phi^{qb,m}(\sigma),$$

où $\mathcal{H}^q$ désigne la mesure de Hausdorff q-dimensionnelle dans M.

Le lemme 1.8 montre que, si $x \in M$, $\theta(x) = t \geq s$ et si y désigne la projection de x sur la sphère (respectivement horosphère) $\{\theta = s\}$,

$$O_\xi B(x,1) \subset O_\xi B(y,r)$$

où

$$\frac{br}{\mathrm{sh}\, b} \leq \frac{\mathrm{sh}\,(br)}{\mathrm{sh}\,(b)} \leq \frac{\mathrm{sh}\,(bs)}{\mathrm{sh}\,(bt)} \leq e^{-b(t-s)}.$$

Si les boules $B_i = O_\xi B(x_i, 1)$ recouvrent σ, leur projection a un diamètre inférieur à ε et

$$\Phi^{qb}(\sigma) \leq \sum_i \phi(B_i)^{qb} + \varepsilon,$$

alors les $B(y_i, s_i)$ recouvrent σ_s d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^q_\varepsilon(\sigma_s) &\leq \sum_i (2r_i)^q \leq \left(\frac{2\mathrm{sh}\, b}{b}\right)^q \sum_i e^{-qb(\theta(x_i)-s)} \\ &\leq \left(\frac{2\mathrm{sh}\, b}{b}\right)^q e^{qbs} \sum_i \phi(B_i)^{qb} \leq \left(\frac{2\mathrm{sh}\, b}{b}\right)^q e^{qbs} (\Phi^{qb,1}(B_i) + \varepsilon).\end{aligned}$$

On conclut car, par définition de ϕ, $\Phi^{qb,m} = \Phi^{qb,1}$. □

5.2. Lemme. *Si h désigne l'*entropie volumique *de M, i.e.,*

$$h = \limsup_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \log \operatorname{vol} B(m, R),$$

alors, pour tout $p > h$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, la mesure $\tilde{\Phi}_\ell^{p,k}$ sur ∂M est nulle.

D'après le lemme 1.15, on a, pour tout $a \subset \partial M \setminus \xi$,

$$\tilde{\phi}_\ell(a) \leq \left(\frac{5\operatorname{sh} b}{b}\right)^{1/b} \ell\, \phi(a)$$

donc il suffit de montrer que $\Phi^{p,1}(\sigma) = 0$ pour tout compact σ de $\partial M \setminus \xi$. On traite d'abord le cas où $\xi = m$ est à distance finie. Notons S le cône sur σ d'origine ξ. Soit $\{x_i\}$ un système maximal de points de S tel que les boules $B(x_i, \frac{1}{2})$ soient deux à deux disjointes. Alors les $B(x_i, 1)$ recouvrent S, et leurs ombres portées depuis ξ recouvrent σ. En fait, pour tout $s > 0$, il suffit, pour recouvrir σ, de prendre les ombres portées des boules centrées sur les x_i tels que $\theta(x_i) > s$. Il vient, pour $n = e^s$,

$$\Phi^{p,1;n}(\sigma) \leq \sum_{\theta(x_i) > s} e^{-pd(x_i, m)}.$$

Pour $s < 0$, notons

$$I(r) = \big\{ i \mid r \leq d(x_i, m) \leq r + 1 \big\}.$$

Il vient

$$\Phi^{p,1;n}(\sigma) \leq \sum_{r=s}^{\infty} \sum_{i \in I(r)} e^{-pd(x_i, m)} \leq \sum_{r=s}^{\infty} e^{-pr} \operatorname{card} I(r).$$

Or, si v est un minorant pour le volume des boules de M de rayon $\frac{1}{2}$, on a

$$v \operatorname{card}\big(I(r)\big) \leq \operatorname{vol} B(m, r + \frac{3}{2}) - \operatorname{vol} B(m, r - \tfrac{1}{2}),$$

d'où

$$\Phi^{p,1;n}(\sigma) \leq \frac{2}{pv} \sum_{r=s}^{\infty} e^{-pr} \operatorname{vol} B(m, r+1),$$

qui tend vers 0 lorsque s tend vers l'infini, dès que $p > h$.

On conclut que $\Phi^{p,1} = 0$.

Lorsque ξ est à l'infini, on fixe une origine $m \in M$ telle que $\theta(m) = 0$. On remarque que, pour $x \in S$, on a

$$\big|\theta(x)\big| \geq d(x, m) - D$$

où D est le diamètre de $S \cap \{\theta = 0\}$. En effet, si y est la projection de x sur l'horosphère $\{\theta = 0\}$, on a

$$d(x,m) \leq d(x,y) + d(y,m) \leq |\theta(x)| + D.$$

Il vient, comme σ est recouvert par les ombres portées des boules centrées sur les x_i tels que $\theta(x_i) > s$ et pour $n = e^s$,

$$\Phi^{p,1;n}(\sigma) \leq \sum_{\theta(x_i)>s} e^{-p\theta(x_i)} \leq e^{pD} \sum_{\theta(x_i)>s} e^{-pd(x_i,m)},$$

et on termine comme ci-dessus. □

5.3. Question. Pour $p = h$, les mesures $\Phi^{p,k}$ sont elles reliées aux mesures introduites par G.A. Margulis dans [8]?

5.4. Corollaire. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour toute famille de connexes non triviaux Γ dans ∂M, les modules grossiers*

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma)$$

sont tous nuls si $q > h/b$.

En effet, un module non nul entraînerait, comme $\tilde{\Phi}_\ell^{p,k}(\sigma) < \infty$ pour $p > h$, qu'il existe une courbe continue non triviale γ telle que $\Phi^{p/q,m}(\gamma) < \infty$. D'après le lemme 5.1, la projection γ_s de γ sur l'horosphère $\{\theta = s\}$ aurait une dimension de Hausdorff $\leq p/qb$. Or M est un espace métrique, donc

$$\dim_{\text{Hausdorff}}(\gamma_0) \geq \dim_{\text{topologique}}(\gamma)$$

d'où $p \geq qb$. □

L'exemple 3.3 et le corollaire 5.4 combinés donnent l'énoncé suivant.

5.5. Théorème. *Si M est simplement connexe, à courbure sectionnelle $K \leq -1$, alors l'entropie volumique $h(M)$ et la dimension à l'infini $\mathbf{q}(\partial M)$ satisfont*

$$h(M) \geq \mathbf{q}(\partial M).$$

Lorsque M est homogène sous le groupe $N \times \mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ agit sur l'algèbre de Lie de N par une dérivation dont les valeurs propres ont des parties réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positives, on a

$$\mathbf{q}(\partial M) = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_1}.$$

La dimension à l'infini permet de montrer que certains espaces homogènes à courbure négative ne sont pas quasiisométriques. En fait, la classification de ces espaces à quasiisométrie près a été complétée récemment par U. Hamenstädt, voir [6].

Les espaces symétriques de rang un, i.e., les espaces hyperboliques $\mathbf{K}H^n$, $n \geq 2$ sur les corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{Ca}$ admettent des quotients compacts. Sur un tel quotient compact, toute métrique à courbure $-a^2 \leq K \leq -1$ doit avoir une entropie supérieure à $nk + k - 2$, où $k = \dim \mathbf{K} = 1, 2, 4$ ou 8. Or l'entropie est toujours majorée par $(nk-1)a$. Il vient

$$a \geq \frac{nk + k - 2}{nk - 1}.$$

Autrement dit, si $\mathbf{K}H^n$ n'a pas une courbure constante, ses quotients compacts ne portent pas de métrique à courbure sectionnelle pincée $-a^2 \leq K \leq -1$ pour $a < (nk + k - 2)/(nk - 1)$. Ceci achève la preuve du théorème 1.

6. Capacités

L'idée de longueur extrémale se concrétise classiquement en deux familles d'invariants conformes: le module d'une famille de courbes, et la capacité d'un condensateur, reflétant la dualité entre courbes et 1-formes différentielles. Cette dualité se prolonge en géométrie conforme grossière.

6.1. Définition. Soit (X, β) un ensemble muni d'une structure quasiconforme. Soit u une application continue de X dans un espace métrique Y. Pour $a \subset X$, posons

$$e(a) = \text{diamètre}\, u(a).$$

Par le procédé décrit en 2.3, il lui correspond une famille de mesures $\tilde{E}_\ell^{p,k}$, $p \geq 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$. On définit *l'énergie* $E_{p,k,\ell}(u)$ par

$$E_{p,k,\ell}(u) = \tilde{E}_\ell^{p,k}(X).$$

Des inégalités données en 2.6, il résulte immédiatement que

6.2. Lemme. *Si $f : (X', \beta') \to (X, \beta)$ est η-quasiconforme et $u : X \to Y$ est continue, alors*

$$E_{p,\eta\circ\eta(k),\ell}(u) \leq E'_{p,\eta(k),\eta(\ell)}(u \circ f) \leq E_{p,k,\eta\circ\eta(\ell)}(u).$$

6.3. Définition. Un *condensateur* dans un espace topologique est un triplet (C, A_0, A_1) où A_0 et A_1 sont contenus dans l'adhérence de C, et C est muni d'une structure quasiconforme β. Etant donné des réels $p > 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, sa *capacité* $\mathrm{cap}_{p,k,\ell}(C, A_0, A_1)$ est la borne inférieure des énergies $E_{p,k,\ell}(u)$ sur les fonctions continues $u : \overline{C} \to \mathbf{R}$ telles que

$$u(A_0) = 0, \qquad u(A_1) = 1.$$

6.4. Lemme. *Soit (C, A_0, A_1) un condensateur muni d'une structure quasi-conforme β, et p un réel positif. On a*

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma) \leq \operatorname{cap}_{p,k,\ell}(C, A_0, A_1),$$

où Γ est la famille des courbes continues reliant A_0 à A_1 dans C.

En effet, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $u(\gamma)$ contient l'intervalle $[0,1]$, donc

$$e^{1,m}(\gamma) \geq \mathcal{H}^1 u(\gamma) \geq 1.$$

6.5. Exemples. Pour toute fonction continue non constante sur $\mathbf{R}^n$, l'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ est infinie pour $p < n$.

En effet, il existe des familles de segments parallèles (exemple 2.10) Γ telles que $\operatorname{osc}(u_{|\gamma}) > \varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et on utilise le lemme 6.4.

La valeur de $p \geq n$ pour laquelle l'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ est finie constitue une mesure de la régularité de u. Par exemple, pour une orbite brownienne ($n = 1$), on a presque toujours $p = 2$. Cependant, l'énergie ne suffit pas à définir des espaces fonctionnels. Il est improbable que la somme $u + v$ soit d'énergie finie dès que u et v le sont.

On est cependant tenté de définir une autre "dimension conforme" $\mathbf{r}(X, \beta)$ comme la borne inférieure des exposants p tels qu'il existe une fonction continue non constante u sur X, un $k \geq 1$ et des ℓ arbitrairement grands tels que la mesure $E_{p,k,\ell}(u)$ soit finie sur les compacts. On va voir que ce choix de définition peut ou non coïncider avec celui fait en 3.1.

6.6. Lemme. *Soit N un groupe nilpotent muni d'une dérivation semi-simple α dont les valeurs propres ont des parties réelles $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Soit u une fonction continue sur un ouvert de N, telle que l'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ soit finie, pour un*

$$p < \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_i}.$$

Alors u est invariante par le sous-groupe de translations à gauche de N engendré par

$$V^i = \bigoplus_{\Re e(\mu) = \lambda_i} \ker(\alpha - \mu).$$

Soit $v \in V^i$ et supposons que $u(x) < u\big(x \exp(v)\big)$. Soit W un supplémentaire de v dans $\mathcal{N}$. Considérons les condensateurs de la forme

$$\begin{aligned} C &= \big\{x \exp(w) \exp(rv) \mid w \in F,\ 0 < s < 1\big\}, \\ \partial_0 C &= \big\{x \exp(w) \mid w \in F\big\}, \\ \partial_1 C &= \big\{x \exp(w) \exp(v) \mid w \in F\big\}, \end{aligned}$$

où $F \subset W$. Comme u est continue, pour F assez petit,

$$\varepsilon = \min_{\partial_1 C} u - \max_{\partial_0 C} u > 0,$$

d'où

$$E_{p,k,\ell}(u) \geq \varepsilon^p \operatorname*{cap}_{p,k,\ell}(C).$$

Or d'après 6.4, $cap_p(C)$ est minoré par le module de la famille des orbites $s \mapsto x\ \exp(sv)$, qui, d'après 2.10, est infini pour $p < (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/\lambda_i$. □

On extrait une sous-suite λ'_i de la suite λ_i comme suit. Notons N^1 le sous-groupe engendré par V^1. Soit W un supplémentaire α-invariant de $\mathcal{N}^1$ dans $\mathcal{N}$. On *note* λ'_2 la plus petite partie réelle de valeur propre de $\alpha_{|W}$. C'est l'un des nombres λ_i. On *note* N^2 le sous-groupe engendré par les espaces propres relatifs aux valeurs propres de partie réelle λ'_2, etc.

6.7. Lemme. *Soit u une fonction lisse sur un ouvert de N, invariante sous le groupe N^{i-1}. Alors $E_{p,k,\ell}(u)$ est fini et non nul seulement si $p = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/\lambda'_i$, et dans ce cas*

$$E_{p,k,\ell}(u) = \ell^p \int |hu|^p\, dx.$$

Soit $x \in N$. Translatons à gauche la forme différentielle $du(x)$ pour en faire une forme linéaire sur l'algèbre de Lie. Posons

$$|hu|(x) = \sup\left\{\langle du(x), v\rangle \mid v \in C \cap V^i\right\},$$

où C désigne la "boule unité" dans l'algèbre de Lie. Alors

$$E_{p,k,\ell}(u) = \ell^p \int |hu|^p\, dx.$$

En effet, montrons que, si x est un point d'une petite boule B, on a

$$\text{diamètre}\,\big(u(B)\big) \sim \big|hu(x)\big|\, \mathrm{vol}(B)^{1/p}.$$

Si $B = e^{t\alpha}\big(\exp(C)\big)$, on a $\mathrm{vol}(B) \sim e^{\lambda'_i pt}$. D'autre part,

$$B = \left\{x\ \exp(e^{t\alpha} v) \mid v \in C\right\}.$$

Ecrivons $v = v_i + \cdots + v_n$. En tenant compte de l'invariance sous N^{i-1}, on a, lorsque t tend vers $-\infty$,

$$\langle du(x), e^{t\alpha} v\rangle \sim e^{\lambda'_i t}\langle hu(x), v_i\rangle$$

d'où

$$u(y)-u(x) \sim \langle du(x), \log(y^{-1}x)\rangle \sim \langle hu(x), e^{\lambda'_i t}v_i\rangle.$$

Il vient

$$\text{diamètre }\big(u(B)\big)^p \sim \big|hu(x)\big|^p e^{\lambda'_i pt} \sim \big|hu(x)\big|^p \operatorname{vol}(B). \ \square$$

6.8. Proposition. *Soit N un groupe nilpotent, α une dérivation semi-simple. Alors la "dimension" $\mathbf{r}(N,\alpha)$ vaut*

$$\mathbf{r}(N,\alpha) = \frac{\operatorname{tr}\alpha}{\lambda}$$

où λ est le plus petit réel tel que

$$\bigoplus_{\Re e(\mu)<\lambda} \ker(\alpha-\mu)$$

n'engendre pas l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$.

En effet, d'après 6.6, pour $p > \operatorname{tr}\alpha/\lambda$, une fonction continue d'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ localement finie doit être N-invariante, i.e., constante.

Inversement, d'après 6.7 pour $p = \operatorname{tr}\alpha/\lambda$, une fonction lisse non constante, invariante sous le dernier sous-groupe N^i a une énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ localement finie et non nulle. $\square$

La fonctionnelle $E_{p,k,\ell}$ étant invariante par transformation quasiconforme, il résulte de la proposition précédente que, lorsque $\lambda \neq \lambda_1$, les feuilletages de N par les orbites des sous-groupes N^i sont invariants par toutes les transformations quasiconformes locales de N.

Le groupe résoluble $G = N \rtimes_\alpha \mathbf{R}$, produit semi-direct de N et $\mathbf{R}$, où le second facteur agit sur le premier par le groupe à un paramètre $e^{t\alpha}$, admet une métrique invariante à gauche à courbure négative. Le sous-groupe N agit sur la sphère à l'infini ∂G en laissant un point fixe, *noté* ∞, et est simplement transitif sur $\partial G\backslash\infty$. Comme mentionné en 1.6, les deux structures quasiconformes obtenues sur N (celle définie en 1.3 et celle induite par ∂G, 1.5), sont équivalentes.

Le feuilletage défini par les orbites de N^1 sur $N \subset \partial G$ ne se prolonge pas au point ∞ de ∂G. On conclut que le point ∞ est fixé par toutes les transformations quasiconformes de ∂G. Il vient

6.9. Corollaire. *Soit G un groupe de Lie connexe, extension d'un groupe nilpotent N par une dérivation semi-simple α à valeurs propres de partie réelle positive. Soit λ_1 la plus petite partie réelle de valeur propre. Supposons que l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ n'est pas engendrée par son sous-espace*

$$\bigoplus_{\Re e(\mu)=\lambda_1} \ker(\alpha-\mu).$$

Alors il existe un point de ∂G qui est fixé par toute quasiisométrie de G.

6.10. Lien entre capacités dans M et capacités dans ∂M. Soit M une variété simplement connexe à courbure sectionnelle $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Quelle correspondance il y a t'il entre fonctions sur M et fonctions sur ∂M? Entre intégrales de Dirichlet $\int_M |du|^p$ dans M et énergies $E_{p,k,\ell}$ dans ∂M?

Un élément de réponse se trouve dans [11]. Si une fonction sur M a son gradient dans L^p pour un $p > 1$, alors elle admet une valeur au bord, qui n'est pas nécessairement continue. Par exemple, si la courbure est constante, ∂M est la sphère standard S^{n-1}. La trace sur le bord de l'espace des fonctions dont le gradient est dans L^p est exactement l'espace de Besov $B^{p,p}_{n-1/p}$ si $p > n-1$, est réduite aux constantes si $p \leq n-1$. Il n'y a donc pas de correspondance directe entre l'intégrale de Dirichlet de u et l'énergie de sa valeur au bord.

Cependant, il semble qu'un lien existe. Notons $\mathbf{p}(M)$ la borne supérieure des exposants p tels que la valeur au bord de toute fonction sur M dont le gradient est dans L^p soit constante, $\mathbf{p}_{\mathrm{loc}}(M)$ la même borne pour des fonctions définies seulement dans un voisinage dans $M \cup \partial M$ d'un point de ∂M. Il est frappant que, pour tous les espaces homogènes à courbure négative,

$$\mathbf{p}(M) = \mathbf{q}(M), \qquad \mathbf{p}_{\mathrm{loc}}(M) = \mathbf{r}(M).$$

6.11. Question. Lorsque M a un quotient compact, quelles inégalités relient les nombres $\mathbf{p}(M)$, $\mathbf{q}(M)$, $\mathbf{p}_{\mathrm{loc}}(M)$, $\mathbf{r}(M)$?

Références

[1] FEDERER, H.: Geometric measure theory. - Grundlehren der Mathematik 153. Springer Verlag, Berlin–New York–Heidelberg, 1969.

[2] GEHRING, F.W., and G.J. MARTIN: Discrete quasiconformal groups I. - Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, 1986, preprint.

[3] GROMOV, M.: Asymptotic geometry of homogeneous spaces. - Proceedings of the conference "Differential Geometry on Homogeneous Spaces", Torino (1983), Rend. Sem. Mat. Polyt. Torino, Fasc. Spe., 1985.

[4] GROMOV, M.: Structures métriques pour les variétés riemanniennes. - Notes de cours rédigées par J. Lafontaine et P. Pansu, CEDIC, Fernand-Nathan, Paris, 1981.

[5] GROMOV, M., and W. THURSTON: Pinching constants for hyperbolic manifolds. - Inventiones Math. 89, 1987, 1–12.

[6] HAMENSTÄDT, U.: Zur Theorie von Carnot–Caratheodory Metriken und ihren Anwendungen. - Bonner Math. Schriften 180, 1987.

[7] HEINTZE, E.: On homogeneous manifolds of negative curvature. - Math. Ann. 211, 1974, 23–24.

[8] MARGULIS, G.A.: Certain measures associated with U-flows on compact manifolds. - Funkt. Analis i Prilozh. 4, 1970, 55–67.

[9] MOSTOW, G.D.: Strong rigidity of locally symmetric spaces. - Ann. of Math. Studies 78, Princeton University Press, Princeton, 1973.

[10] PANSU, P.: Quasiconformal mappings and manifolds of negative curvature. - Proceedings of the Taniguchi Symposium "Curvature and Topology of Riemannian manifolds,

Katata, 1985". Lecture Notes in Mathematics 1201. Springer-Verlag, Berlin–New York–Heidelberg, 1986.

[11] Pansu, P.: Quasiisométries des variétés à courbure négative. - Thèse, Université de Paris 7, 1987.

[12] Sullivan, D.: On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. - In "Riemann Surfaces and related topics, Stony Brook 1978". Ann. of Math. Studies 97, Princeton University Press, Princeton, 1981, 465–496.

[13] Tukia, P.: A quasiconformal group not isomorphic to a Möbius group. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 6, 1981, 149–160.

[14] Tukia, P., and J. Väisälä: Quasisymmetric embeddings of metric spaces. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 5, 1980, 97–114.

[15] Väisälä, J.: Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. - Lecture Notes in Mathematics 229. Springer-Verlag, Berlin–New York–Heidelberg, 1971.

[16] Väisälä, J.: Quasimöbius maps. - J. Anal. Math. 44, 1984/85, 218–234.

[17] Väisälä, J.: Quasisymmetric maps of products of curves into the plane. - Université d'Helsinki, 1986, preprint.

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
F–91128 Palaiseau Cedex
France

Received 29 January 1987

Revised 15 September 1988