ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

581

CHARAKTERISIERUNG EINIGER SESQUILINEAR- UND BILINEARFORMEN MIT HILFE VON ADJUNKTIONEN

VON

JUKKA SARANEN

HELSINKI 1974
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1975.581

ISSN 0066-1953
ISBN 951-41-0187-1

Vorgelegt am 11. März 1974

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1974

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. Ilppo Simo Louhivaara meinen besten Dank für sein Interesse an dieser Abhandlung sowie für seine Hilfe aussprechen. Mein Dank gilt auch Herrn Professor Dr. Heinz Langer für seine wertvollen Bemerkungen beim Durchlesen der Arbeit. Frau Eira Henriksson danke ich für die sorgfältige Reinschrift des Manuskripts.

Der Ellen und Artturi Nyyssönen -Stiftung und der Emil Aaltonen -Stiftung bin ich wegen der finanziellen Unterstützung sowie der Finnischen Akademie der Wissenschaften wegen der Aufnahme dieser Arbeit in die Annalen zu großem Dank verpflichtet.

Jyväskylä im Mai 1974

Jukka Saranen

Inhalt

Einleitung

Es sei $(X, [\cdot \mid \cdot])$ ein reeller oder komplexer Hilbertraum und $\mathcal{B}(X)$ die Algebra von allen bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, $\|x\| = [x \mid x]^{1/2}$, beschränkten Operatoren. Das Skalarprodukt $[\cdot \mid \cdot]$ definiert für jeden Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ einen eindeutigen adjungierten Operator $T^* \in \mathcal{B}(X)$ mit der Eigenschaft

$$[T x \mid y] = [x \mid T^* y] \quad \text{für alle} \quad x, y \in X. \tag{1}$$

Die entstehende Abbildung (Involution) $T \to T^*$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$T^{**} = T, \tag{2}$$

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*, \tag{3}$$

$$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*, \tag{4}$$

$$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*, \tag{5}$$

$$T^* T = 0 \Rightarrow T = 0. \tag{6}$$

Schon in den vierziger Jahren wurde von S. Kakutani und G. W. Mackey [9] das umgekehrte Problem gelöst: Wenn X ein reeller Banachraum ist und wenn in der Algebra aller beschränkten Operatoren eine Abbildung $T \to T^*$ mit den Eigenschaften (2), (3), (5), (6) gegeben ist, so existiert im Raum X ein Hilbertsches Skalarprodukt so, daß (1) gilt und die entsprechende Hilbertsche Norm der ursprünglichen Norm äquivalent ist.

Im komplexen Fall kann man aus den Bedingungen (2), (3), (5), (6) die Gültigkeit von (4) nur dann folgern, wenn die Dimension des Raumes unendlich ist; unter dieser Einschränkung erhält man ein ähnliches Resultat wie im reellen Fall [10].

Unter der zusätzlichen Annahme der Bedingung (4) behandelte Y. Kawada [11] ohne Dimensionsbeschränkungen gleichzeitig sowohl den komplexen als auch den reellen Fall.

Als eine Anwendung der Theorie der involutorischen Banachalgebren mit minimalen Idealen erreichte C. E. Rickart [15] (vgl. auch [16]) eine Erweiterung des Kakutani—Mackeyschen Resultates: Das Resultat besteht unter der Annahme, daß die Involution in einer genügend großen Teilalgebra von allen beschränkten Operatoren gegeben ist.

Die Bedingung (6) ist besonders mit der Definitheit des erhaltenen Skalarproduktes verbunden. Neulich zeigte J. Bognár [3]—[4], daß eine für alle beschränkten Operatoren eines Banachraumes gegebene Involution mit den Eigenschaften (2)—(5) als die Adjunktion einer beschränkten nichtentarteten Sesquilinearform dargestellt werden kann und daß für k -indefinite Pontrjaginsche Räume anstelle (6) die folgenden Bedingungen eintreten:

$$\max \{ \dim R(T) \mid T^* T = 0 \} = k \, , \tag{7a}$$

$$\exists \, T_0 : \quad \dim R(T_0) = 1 \, , \quad T_0^* T_0 \neq 0 \, . \tag{7b}$$

Im komplexen Fall ist (7b) unnötig. Die Bedingungen stammen von M. G. Kreĭn, man vergleiche [4: S. 64].

In dieser Arbeit untersuchen wir zuerst den Zusammenhang zwischen den zwei durch eine nichtentartete Sesquilinear- oder Bilinearform $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}$ ist $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$, erklärten Adjunktionen und der Form b.

In Kapitel 4 erreichen wir unter einigen Annahmen die Konstruktion einer Sesquilinearform (Bilinearform) in minimalen Idealen der gegebenen Algebren.

In Kapitel 5 wenden wir diese Konstruktion in Operatorenalgebren an. Wir behandeln den Übergang von Symmetrieeigenschaften der Adjunktion auf die Sesquilinear- und Bilinearform etwas allgemeiner als in [4], und unsere Betrachtungen enthalten auch den nichtsymmetrischen Fall.

In Kapitel 6 geben wir eine direkte Erweiterung des Resultats von Kawada für) -Räume. Schließlich betrachten wir Pontrjaginsche Räume und beweisen im komplexen Fall einen algebraischen Ersatz der Charakterisierung (7).

1. Nichtentartete Sesquilinear- und Bilinearformen und durch diese definierte Adjunktionen

Es sei X ein reeller oder komplexer Vektorraum (der skalare Körper $\boldsymbol{K}$ ist $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$).

Wir benutzen folgende Bezeichnungen

$$\mathscr{L}(X) = \{ T \mid T : X \to X ,\ T \text{ linear} \} ,$$

$$R(T) = \text{die Wertemenge der Transformation } T ,$$

$$N(T) = \text{die Nullmenge der Transformation } T ,$$

$$X' = \{ f \mid f : X \to \boldsymbol{K} ,\ f \text{ linear} \} ,$$

$$M \dotplus N = \text{die direkte Summe der linearen Mannigfaltigkeiten } M \text{ und } N ,$$

$$V\{x_1 , \ldots , x_n\} = \text{die lineare Hülle der Menge } \{x_1 , \ldots , x_n\} .$$

Für einen normierten Raum X wird bezeichnet:

$$\mathscr{B}(X) = \{ T \in \mathscr{L}(X) \mid T \text{ beschränkt} \} ,$$

$$X^* = \{ f \in X' \mid f \text{ beschränkt} \} .$$

Es seien X und Y Vektorräume mit demselben skalaren Körper $\boldsymbol{K}$. Eine Abbildung $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ heißt eine *nichtentartete Bilinearform*, falls

(1.1a) $$b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 , y) = \alpha_1 b(x_1 , y) + \alpha_2 b(x_2 , y) ,$$

(1.1b) $$b(x , \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 b(x , y_1) + \alpha_2 b(x , y_2) ,$$

(1.2a) $$b(x , y) = 0 ,\ \forall\, y \quad \Rightarrow \quad x = 0 ,$$

(1.2b) $$b(x , y) = 0 ,\ \forall\, x \quad \Rightarrow \quad y = 0 .$$

Entsprechend ist die Abbildung $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ eine *nichtentartete Sesquilinearform*, wenn die Bedingungen (1.1a), (1.2a), (1.2b) erfüllt sind und wenn statt (1.1b) die Antilinearität gilt:

(1.1c) $$b(x , \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 b(x , y_1) + \bar{\alpha}_2 b(x , y_2) .$$

Im Falle $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ fallen die Begriffe Linearität und Antilinearität bzw. Bilinearität und Sesquilinearität zusammen.

Wir benutzen eine gemeinsame Bezeichnung für die Bedingungen (1.1b) und (1.1c):

(1.1d) $$b(x\,,\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \tilde{\alpha}_1\, b(x\,,y_1) + \tilde{\alpha}_2\, b(x\,,y_2)\,.$$

wo $\alpha \to \tilde{\alpha}$ eine Abbildung $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}$ so darstellt, daß $\tilde{\alpha} = \alpha$ oder $\bar{\alpha}$ ist. Die Form b nennen wir dann $(\alpha\,,\tilde{\alpha})$ *-linear.*

Lemma 1.1. *Es sei* $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ *eine nichtentartete* $(\alpha\,,\tilde{\alpha})$ *-lineare Form. Wenn* $\{x_1\,,\ldots,x_n\} \subset X$ *eine linear unabhängige Menge ist, existiert eine linear unabhängige Menge* $\{y_1\,,\ldots,y_n\} \subset Y$ *so, daß* $b(x_i\,,y_j) = \delta_{ij}$ *, gilt.*

Der Beweis im bilinearen Fall ist zum Beispiel in [16: S. 63] gegeben, und der sesquilineare Fall ist ganz analog.

Falls $X = Y$ und $A \in \mathcal{L}(X)$ eine bijektive Abbildung ist und falls für alle $x\,,y \in X$

(1.3) $$b(y\,,x) = (b(A\,x\,,y))^{\sim}$$

gilt, nennen wir die $(\alpha\,,\tilde{\alpha})$ -lineare Form b A *-symmetrisch.* Besonders für $A = I$ (I = die identische Transformation) ist b *symmetrisch* und für $A = -I$ *schiefsymmetrisch.* Eine nichtentartete Form kann A -symmetrisch nur für einen Operator A sein.

Für normierte Räume $(X\,,\|\cdot\|)$ und $(Y\,,\|\cdot\|)$ ist die Form b *beschränkt,* falls mit einer Konstante $\gamma > 0$ für alle $x \in X$, $y \in Y$

(1.4) $$|b(x\,,y)| \leqq \gamma\, \|x\|\, \|y\|$$

gilt.

Es sei $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ eine nichtentartete $(\alpha\,,\tilde{\alpha})$ -lineare Form, und man erkläre

$$\mathcal{A}^r = \{\, T \in \mathcal{L}(X) \mid \exists\, T^* \in \mathcal{L}(Y) : b(T\,x\,,y) = b(x\,,T^*\,y)\,\}\,.$$
$$\mathcal{A}^l = \{\, S \in \mathcal{L}(Y) \mid \exists\, S^+ \in \mathcal{L}(X) : b(x\,,S\,y) = b(S^+ x\,,y)\,\}\,.$$

Diese von b abhängigen Mengen sind Teilalgebren von $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(Y)$ (bezüglich gewöhnlicher Operationen) so, daß sie wenigstens alle skalaren Operatoren (die Operatoren $\lambda\, I_X$, $\lambda\, I_Y$) der entsprechenden Räume enthalten.

Die entstehenden bijektiven Abbildungen $* : \mathcal{A}^r \to \mathcal{A}^l$ und $+ : \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}^r$ (die rechtsseitige und linksseitige Adjunktion) haben die Eigenschaften

(1.5a) $$\begin{aligned} (\alpha_1\, T_1 + \alpha_2\, T_2)^* &= \tilde{\alpha}_1\, T_1^* + \tilde{\alpha}_2\, T_2^*\,, \\ (T_1\, T_2)^* &= T_2^*\, T_1^*\,, \end{aligned} \qquad T_1\,, T_2 \in \mathcal{A}^r\,,$$

$$(1.5b)\qquad \begin{aligned} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2)^+ &= \tilde{\alpha}_1 S_1^+ + \tilde{\alpha}_2 S_2^+ , \\ (S_1 S_2)^+ &= S_2^+ S_1^+ , \end{aligned} \qquad S_1 , S_2 \in \mathcal{A}^l ,$$

und sind durch

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} (T^*)^+ &= T , \qquad T \in \mathcal{A}^r , \\ (S^+)^* &= S , \qquad S \in \mathcal{A}^l , \end{aligned}$$

verbunden. Es gilt $+ = *^{-1}$.

Falls besonders b A-symmetrisch ist, so folgt aus der Gleichung

$$b(A x , y) = (b(y , x))^{\sim} = (b(A A^{-1} y , x))^{\sim} = b(x , A^{-1} y) ,$$

daß $A \in \mathcal{A}^r$ und $A^* = A^{-1}$ gilt. Im Falle $T \in \mathcal{A}^r$ sieht man dann aus der Relation

$$b(x , T y) = (b(A T y , x))^{\sim} = (b(y , T^* A^{-1} x))^{\sim} = b(A T^* A^{-1} x , y) ,$$

daß $T \in \mathcal{A}^l$ mit $T^+ = A T^* A^{-1}$ gilt. Auf eine ähnliche Weise zeigt man die Relationen $\mathcal{A}^l \subset \mathcal{A}^r$ und $T^* = A^{-1} T^+ A$ für alle $T \in \mathcal{A}^l$. Es gilt besonders $\mathcal{A}^l = \mathcal{A}^r$.

2. Algebraische Definitionen und Resultate

Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Algebren über demselben skalaren Körper $\boldsymbol{K}$.

Definition 2.1. *Eine bijektive Abbildung* $* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *heißt* ($\tilde{\alpha}$ *-lineare) Quasiinvolution* [1]), *wenn sie die Eigenschaften (1.5a) hat.*

Die Quasiinvolution $*$ *ist Involution, wenn* $* = *^{-1}$ *(dann ist* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ *). Falls* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ *eine Algebra mit Einselement ist und falls ein reguläres* [2]) *Element* $\mathrm{a} \in \mathcal{A}$ *mit der Eigenschaft* $\mathrm{x}^+ = \mathrm{a}\, \mathrm{x}^* \mathrm{a}^{-1}$, $+ = *^{-1}$, $\mathrm{a}^* = \mathrm{a}^{-1}$, *existiert, nennt man die Quasiinvolution* $*$ a *-symmetrisch.*

Wenn $*$ a-symmetrisch und $\lambda \tilde{\lambda} = 1$ ist, ist $*$ auch $\lambda \mathrm{a}$-symmetrich. Wenn $*$ eine Quasiinvolution ist, so gilt dasselbe auch für die inverse Abbildung. Wir bezeichnen (wie schon in der obigen Definition) die inverse Abbildung $*^{-1}$ von $*$ mit $+$ und betrachten darum zwei Quasiinvolutionen $*$ und $+$ mit der Eigenschaft (1.6).

Eine Operatorenalgebra $\mathcal{A}$ des Vektorraumes X ist *dicht,* falls für zwei beliebige endliche Systeme $\{ x_1 , \ldots , x_n \} , \{ y_1 , \ldots , y_n \} \subset X$,

[1]) Die »Quasiinvolution» in [15] ist ein anderer Begriff. In algebraischer Literatur würde $*$ vielleicht ein $\tilde{\alpha}$-linearer Antiisomorphismus genannt.

[2]) In einer Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e ist das Element a *regulär,* falls ein Element $\mathrm{a}^{-1} \in \mathcal{A}$ so existiert, daß $\mathrm{a}^{-1} \mathrm{a} = \mathrm{a}\, \mathrm{a}^{-1} = \mathrm{e}$ gilt.

wobei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linear unabhängi gist, ein Operator $T \in \mathcal{A}$ mit $T x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$, existiert.

Für einen Vektor $u \in X$ und ein lineares Funktional $f \in X'$ definieren wir einen Operator $u \otimes f \in \mathcal{L}(X)$:

$$(2.1) \qquad (u \otimes f)\, x = f(x)\, u .$$

Für $u \neq 0$, $f \neq 0$ ist $u \otimes f$ ein eindimensionaler Operator (das heißt $\dim R(u \otimes f) = 1$), und es gilt $R(u \otimes f) = V\{u\}$, $N(u \otimes f) = N(f)$. Im normierten Fall ist der Operator $u \otimes f$, $u \neq 0$, genau dann beschränkt, als $f \in X^*$ gilt (dann gilt $\|u \otimes f\| = \|f\|\,\|u\|$, wo $\|f\| = \sup\{\,|f(x)|\;|\;\|x\| \leq 1\,\}$ ist).

Jeder endlichdimensionale Operator kann als eine endliche Summe von Operatoren der Form $u \otimes f$ dargestellt werden: Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$, $\dim R(T) = n$ $(n > 0)$ und $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von $R(T)$. Dann definiert die Gleichung

$$T x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, u_i$$

die linearen Funktionale f_i $(\neq 0)$ und es gilt

$$(2.2) \qquad T = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i .$$

Es sei $\mathcal{R}(X) = \{\, T \in \mathcal{L}(X) \mid \dim R(T) < \infty \,\}$ die Algebra der endlichdimensionalen Operatoren im Raum X. In einem normierten Fall sei $\mathcal{R}_0(X) = \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{B}(X)$ erklärt.

Mit Hilfe von Darstellung (2.2) beweisen wir:

Lemma 2.2. *Die Algebra $\mathcal{R}(X)$ ist dicht. Im normierten Fall ist auch $\mathcal{R}_0(X)$ dicht.*

Beweis. Es seien $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset X$ zwei Systeme von n Elementen, von denen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linear unabhängig ist. Weil die Bilinearform $b : X \times X' \to \boldsymbol{K}$, $b(x, f) = f(x)$, und im normierten Fall die Bilinearform $b^* : X \times X^* \to \boldsymbol{K}$, $b^*(x, g) = g(x)$, nichtentartet ist (für b^* folgt das aus einem Satz von Hahn und Banach), können wir die Elemente $f_i \in X'$ bzw. $g_i \in X^*$, $i = 1, \ldots, n$, so wählen, daß

$$f_j(x_i) = b(x_i, f_j) = \delta_{ij}$$

bzw. $g_j(x_i) = \delta_{ij}$ ist. Dann gelten für den Operator

$$T = \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes f_j \quad \text{bzw.} \quad S = \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes g_j$$

die Bedingungen $T \in \mathcal{R}(X)$ bzw. $S \in \mathcal{R}_0(X)$ und

$$T\,x_i = \sum_{j=1}^{n} (y_j \otimes f_j)\,x_i = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_i)\,y_j = y_i\,.$$

bzw. $S\,x_i = y_i\,,\ i = 1\,,\ldots,n\,.$ □

Wenn $\mathcal{A}$ dicht ist und $T \in \mathcal{A} \cap \mathcal{K}(X)\,,\ T \neq 0\,,$ Darstellung (2.2) hat, ergibt sich mit $W_i \in \mathcal{A}:\ W_i\,u_j = \delta_{ij}\,u_i\,,\ i\,,j = 1\,,\ldots,n\,,$ die Relation $u_i \otimes f_i = W_i\,T \in \mathcal{A}$, und folglich ist T eine Summe von eindimensionalen Operatoren in $\mathcal{A}$. Für eine dichte Algebra $\mathcal{A}$ sind also die folgenden Bedingungen äquivalent:

(2.3a) $\qquad \mathcal{A} \cap \mathcal{K}(X) \neq (0)\,.$

(2.3b) $\qquad$ Es existiert ein eindimensionaler Operator in $\mathcal{A}$.

Diese Bedingung läßt sich auch algebraisch ohne Benutzung des zugrundeliegenden Vektorraumes zu formulieren. Falls nämlich die Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ dicht und falls $A = u \otimes f \in \mathcal{A}$ eindimensional ist, ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{A}\,A &= \{\,T\,(u \otimes f) \mid T \in \mathcal{A}\,\} = \{\,(T\,u) \otimes f \mid T \in \mathcal{A}\,\}\\ &= \{\,x \otimes f \mid x \in X\,\}\end{aligned}$$

ein minimales Linksideal in $\mathcal{A}$ [3]. Umgekehrt ist jedes von Null verschiedene Element A eines minimalen Linksideals $\mathcal{L}$ einer dichten Algebra eindimensional [16: S. 65]. Mit den Bedingungen (2.3a) und (2.3b) ist also die folgende gleichwertig:

(2.3c) $\qquad$ Es existiert ein minimales Linksideal in $\mathcal{A}$.

Das minimale Linksideal $\mathcal{L} = \{\,x \otimes f \mid x \in X\,\}$ einer dichten Algebra $\mathcal{A}$ hat auch die Darstellung $\mathcal{L} = \mathcal{A}\,P$ mit einem idempotenten Operator $P \in \mathcal{L}$: Man wähle $P = u \otimes f\,,\ f(u) = 1\,.$ Mit Hilfe der dichten Operatorenalgebren erhalten wir eine brauchbare Charakterisierung für eindimensionale Operatoren (vgl. [5: Lemma 2]).

Lemma 2.3. *Es sei $\mathcal{A}$ eine dichte Operatorenalgebra des Vektorraumes X. Der Operator $A\ (\neq 0) \in \mathcal{L}(X)$ ist genau dann eindimensional, wenn die Gleichung $A\,T\,A = \lambda\,A$ für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt.*

Beweis. Ist A eindimensional, $A = u \otimes f$, dann gilt

$$A\,T\,A = (A\,T\,u) \otimes f = (\lambda\,u) \otimes f = \lambda\,(u \otimes f) = \lambda\,A\,,$$

wobei $A\,T\,u = \lambda\,u$ ist. Wenn umgekehrt $A\ (\neq 0)$ nicht eindimensional ist, existiert eine linear unabhängige Menge $\{x_1\,,x_2\} \subset R(A)$. Es sei $x_i = A\,y_i\,,\ i = 1, 2\,.$ Die Wahl $T \in \mathcal{A}:\ T\,x_1 = y_2\,,\ T\,x_2 = y_1\,,$ gibt dann

[3]) Ein Linksideal $\mathcal{L} \neq (0)$ der Algebra $\mathcal{A}$ ist *minimal*, wenn $\mathcal{L}$ keine weiteren Linksideale außer $\mathcal{L}$ und (0) enthält.

$$A\,T\,A\,y_1 = A\,T\,x_1 = A\,y_2 = x_2 \neq \lambda\,x_1 = \lambda\,A\,y_1$$

für alle $\lambda \in \boldsymbol{K}$. $\square$

Folgerung 2.4. *Es seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(Y)$ dichte Operatorenalgebren und $*: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Quasiinvolution. Wenn $T \in \mathcal{A}$ eindimensional ist, ist auch T^* eindimensional, und die Bedingungen*

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{R}(X) \neq (0)\,, \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{R}(Y) \neq (0)$$

sind äquivalent.

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial wegen der obigen Charakterisierung, und die zweite folgt dann aus den äquivalenten Bedingungen (2.3a) und (2.3b). $\square$

3. Einige Eigenschaften von Adjunktionen

Es seien $*$ und $+$ die durch eine nichtentartete $(\chi\,,\tilde{\chi})$-lineare Form $b: X \times Y \to \boldsymbol{K}$ definierten Adjunktionen. Mit Hilfe der linearen Funktionale $b_y \in X'$, $\tilde{b}_x \in Y'$,

$$b_y(x) = b(x\,,y)\,, \tag{3.1a}$$

$$\tilde{b}_x(y) = (b(x\,,y))^{\sim}\,, \tag{3.1b}$$

kann man diejenigen endlichdimensionalen Operatoren $T \in \mathcal{L}(X)$ bzw. $S \in \mathcal{L}(Y)$ charakterisieren, die einen adjungierten Operator T^* bzw. S^+ bezüglich der Form b haben. Also handelt es sich um die Charakterisierung der Algebren $\mathcal{A}^r \cap \mathcal{R}(X)$ bzw. $\mathcal{A}^l \cap \mathcal{R}(Y)$.

Satz 3.1. *Es sei $b: X \times Y \to \boldsymbol{K}$ eine nichtentartete $(\chi\,,\tilde{\chi})$-lineare Form. Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ bzw. $S \in \mathcal{L}(Y)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $T \in \mathcal{A}^r \cap \mathcal{R}(X)$ *bzw.* $S \in \mathcal{A}^l \cap \mathcal{R}(Y)$,

(b) *der Operator T bzw. S hat die Darstellung*

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes b_{y_i} \quad bzw. \quad S = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \tilde{b}_{u_i}\,.$$

Es gilt dann

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes \tilde{b}_{x_i} \quad bzw. \quad S^+ = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes b_{v_i}\,.$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Es sei $T \in \mathcal{A}^r \cap \mathcal{R}(X)$, $T \neq 0$. Dann hat T eine Darstellung

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i$$

und aus der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, b(x_i\,,\, y) \;=\; b\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i\,,\, y\right) \;=\; b(T\,x\,,\, y) \;=\; b(x\,,\, T^*\, y)$$

erhalten wir mit $y_j \in Y$, $j = 1\,,\, \ldots\,,\, n$, $b(x_i\,,\, y_j) = \delta_{ij}$, die Relation

$$f_i(x) \;=\; b(x\,,\, T^*\, y_i) \;=\; b_{T^* y_i}(x)\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (a) : Für

$$T \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes b_{y_i}$$

gilt

$$\begin{aligned} b(T\,x\,,\, y) \;&=\; b\left(\sum_{i=1}^{n} b(x\,,\, y_i)\, x_i\,,\, y\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} b(x\,,\, y_i)\, b(x_i\,,\, y) \\ &=\; b\left(x\,,\, \sum_{i=1}^{n} (b(x_i\,,\, y))^{\sim}\; y_i\right) \;=\; b(x\,,\, T^*\, y)\,, \end{aligned}$$

wo T^* den Operator

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \otimes \tilde{b}_{x_i}$$

bezeichnet. □

Wegen der Symmetrie, jedoch die $\tilde{\alpha}$ -Linearität der Form b bezüglich des zweiten Arguments beachtend, formulieren wir einige Sätze von nun an nur einseitig.

Folgerung 3.2. *Es sei $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ eine nichtentartete $(\alpha\,,\, \tilde{\alpha})$ -lineare Form. Dann ist die Algebra $\mathcal{A}^r \cap \mathcal{R}(X)$ dicht.*

Beweis. Falls $\{x_1\,,\, \ldots\,,\, x_n\}\,,\, \{z_1\,,\, \ldots\,,\, z_n\} \subset X$, wobei $\{x_1\,,\, \ldots\,,\, x_n\}$ linear unabhängig ist, irgendwelche Mengen sind, erhalten wir mit $y_j \in Y$, $j = 1\,,\, \ldots\,,\, n$, $b(x_i\,,\, y_j) = \delta_{ij}$, für den Operator

$$T \;=\; \sum_{j=1}^{n} z_j \otimes b_{y_j}$$

die Relation

$$T\, x_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} b(x_i\,,\, y_j)\, z_j \;=\; z_i\,,$$

was die Dichtheit zeigt. □

Falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ dicht ist und falls $x_0 \in X$ ein festes von Null verschiedenes Element ist, existiert für jedes $x \in X$ ein Operator $A \in \mathcal{A}$ mit $A\, x_0 = x$. Also im Falle einer dichten Algebra sind die Bedingungen

(3.2a) $\qquad \exists\, x_0 \neq 0 : \quad x_0 \otimes f \in \mathcal{A}\,,$

(3.2b) $\qquad \forall\, x \text{ gilt} : \quad x \otimes f \in \mathcal{A}\,,$

äquivalent für ein lineares Funktional $f \in X'$. Mit den Bezeichnungen

$$X^r = \{ b_y \in X' \mid y \in Y \},$$

$$Y^l = \{ \tilde{b}_x \in Y' \mid x \in X \},$$

erhalten wir dann aus Satz 3.1:

Folgerung 3.3. *Es sei $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ eine nichtentartete $(\alpha, \tilde{\alpha})$-lineare Form. Dann gilt*

$$X^r = \{f \in X' \mid x \otimes f \in \mathscr{A}^r, \forall x \in X\} = \{f \in X' \mid \exists x_0 \neq 0 : x_0 \otimes f \in \mathscr{A}^r\},$$

$$Y^l = \{g \in Y' \mid y \otimes g \in \mathscr{A}^l, \forall y \in Y\} = \{g \in Y' \mid \exists y_0 \neq 0 : y_0 \otimes g \in \mathscr{A}^l\}.$$

Wir haben gesehen, daß für eine A-symmetrische Form die Relation $\mathscr{A}^r = \mathscr{A}^l$ gilt. Auch die Umkehrung kann bewiesen werden, sogar mit schwächeren Annahmen.

Lemma 3.4. *Es sei $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ eine nichtentartete $(\alpha, \tilde{\alpha})$-lineare Form und $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^r$ eine dichte Algebra mit $\mathscr{A} \cap \mathfrak{F}(X) \neq (0)$ so, daß $*(\mathscr{A})$ (die Bildalgebra von $\mathscr{A}$ unter der Adjunktion $*$) auch dicht ist. Dann gilt $\mathscr{A} \cap \mathfrak{F}(X) = \mathscr{A}^r \cap \mathfrak{F}(X)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mathscr{A}^r \cap \mathfrak{F}(X) \subset \mathscr{A} \cap \mathfrak{F}(X)$ gilt. Es sei

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes b_{y_i}$$

ein beliebiges Element von $\mathscr{A}^r \cap \mathfrak{F}(X)$. Weil $\mathscr{A} \cap \mathfrak{F}(X) \subset \mathscr{A}^r \cap \mathfrak{F}(X)$ ist, hat jeder endlichdimensionale Operator von $\mathscr{A}$ die Form

$$\sum_{i=1}^{m} x_i' \otimes b_{y_i'},$$

wo $x_i' \otimes b_{y_i'} \in \mathscr{A}$ wegen der Dichtheit von $\mathscr{A}$ gilt. Weil $\mathscr{A} \cap \mathfrak{F}(X) \neq (0)$ ist, gibt es ein y_0 so, daß $x \otimes b_{y_0} \in \mathscr{A}$ für ein von Null verschiedenes x und damit wegen der Dichtheit auch für alle x gilt. Aus $y_0 \otimes \tilde{b}_x = (x \otimes b_{y_0})^* \in *(\mathscr{A})$ sehen wir unter Berücksichtigung der Dichtheit von $*(\mathscr{A})$, daß $y \otimes \tilde{b}_x \in *(\mathscr{A})$ für alle $x \in X$, $y \in Y$ gilt. Es folgt daraus

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes \tilde{b}_{x_i} \in *(\mathscr{A})$$

also $T = (T^*)^+ \in +(*(\mathscr{A})) = \mathscr{A}$. □

Satz 3.5. *Für eine nichtentartete $(\alpha, \tilde{\alpha})$-lineare Form $b : X \times X \to \boldsymbol{K}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *b ist A-symmetrisch für ein A,*

(b) *Es gibt eine dichte Algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^r \cap \mathscr{A}^l$, $\mathscr{A} \cap \mathfrak{F}(X) \neq (0)$ so, daß $*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Es genügt $\mathcal{A} = \mathcal{A}^r = \mathcal{A}^l$ zu wählen und Folgerung 3.2 zu berücksichtigen.

(b) $\Rightarrow$ (a): Für alle $x, z \in X$ gilt $x \otimes b_z \in \mathcal{A}$ (Satz 3.1, Lemma 3.4) mit $(x \otimes b_z)^* = z \otimes \tilde{b}_x$. Es sei z ein festes von Null verschiedenes Element. Dann ist $z \otimes \tilde{b}_x$ ein höchstens eindimensionaler Operator von $\mathcal{A}$ und hat darum die Darstellung $z \otimes \tilde{b}_x = z \otimes b_{x'}$ für ein geeignetes von x abhängiges Element $x' \in X$. Wegen $z \neq 0$ ist die obige Gleichung äquivalent mit

$$(b(x, y))^{\sim} = b(y, x') \qquad \text{für alle } y \in X .$$

Aus der Nichtentartetheit folgt die Eindeutigkeit des Elements x', und die Definition $B x = x'$ gibt dann einen Operator $B \in \mathcal{L}(X)$. Dieser Operator ist wegen der Nichtentartetheit injektiv und epijektiv, weil jeder eindimensionale Operator von $\mathcal{A}$ das Bild eines eindimensionalen Operators von $\mathcal{A}$ in der Abbildung $*$ ist (Folgerung 2.4). Mit $A = B^{-1}$ ergibt sich

$$b(y, x) = b(y, B A x) = (b(A x, y))^{\sim} . \ \square$$

Wir betrachten die Algebren $\mathcal{A}^r$ und $\mathcal{A}^l$ noch von einem anderen Gesichtspunkt. Für eine nichtentartete $(\alpha, \tilde{\alpha})$-lineare Form $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ bezeichnen wir

$$b_{T,y} \in X' : \quad b_{T,y}(x) = b(T x, y), \quad \forall x \in X ,$$

$$\tilde{b}_{x,S} \in Y' : \quad \tilde{b}_{x,S}(y) = (b(x, S y))^{\sim}, \quad \forall y \in Y .$$

Lemma 3.6. *Es gilt* $\mathcal{A}^r = \{ T \in \mathcal{L}(X) \mid b_{T,y} \in X^r, \ \forall y \in Y \}$.

Beweis. Falls $T \in \mathcal{A}^r$ gilt, so ist $b_{T,y}(x) = b(T x, y) = b(x, T^* y)$, woraus $b_{T,y} \in X^r$ folgt. Andererseits, wenn $b_{T,y} \in X^r$ für alle y gilt, existiert ein Element $z_y \in Y$ mit der Eigenschaft

$$b(T x, y) = b_{T,y}(x) = b(x, z_y) \qquad \text{für alle } x \in X .$$

Die Eindeutigkeit dieses Elements folgt aus der Nichtentartetheit der Form b, und die Gleichung $T^* y = z_y$ definiert dann die erforderte Transformation $T^* \in \mathcal{L}(Y)$. $\square$

Satz 3.7. *Für eine nichtentartete* $(\alpha, \tilde{\alpha})$*-linearer Form* $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{A}^r$,

(b) $X^r = X'$.

(c) $\mathcal{A}^r = \mathcal{L}(X)$.

Im normierten Fall sind für eine beschränkte nichtentartete $(\alpha, \tilde{\alpha})$*-lineare Form die Bedingungen*

(a') $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A}^r$,

(b') $X^r = X^*$,
(c') $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}^r$,

äquivalent. Für einen vollständigen Raum X ist die Bedingung (c') durch
(c'') $\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}^r$

ersetzbar.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Folgerung 3.3.

(b) $\Rightarrow$ (c): Angenommen $X^r = X'$ ist, gilt

$$\mathcal{A}^r = \{ T \in \mathcal{L}(X) \mid b_{T,y} \in X' , \ \forall y \in Y \} = \mathcal{L}(X) .$$

(a') $\Rightarrow$ (b'): Für eine beschränkte Form gilt $X^r \subset X^*$, und aus 3.3 folgt unter der Annahme $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A}^r$

$$\begin{aligned} X^r &= \{ f \in X' \mid x \otimes f \in \mathcal{A}^r , \ \forall x \in X \} \\ &\supset \{ f \in X' \mid x \otimes f \in \mathcal{K}_0(X) , \ \forall x \in X \} = X^* . \end{aligned}$$

(b') $\Rightarrow$ (c'): Falls $X^* = X^r$ und b beschränkt ist, gilt

$$\mathcal{A}^r = \{ T \in \mathcal{L}(X) \mid b_{T,y} \in X^* , \ \forall y \in Y \} \supset \mathcal{B}(X) .$$

Im Banachschen Fall gilt auch $\mathcal{A}^r \subset \mathcal{B}(X)$, denn aus $x_n \to 0$, $T x_n \to z$, $T \in \mathcal{A}^r$ folgt für jedes Element $y \in Y$

$$0 = \lim b(x_n , T^* y) = \lim b(T x_n , y) = b(z , y) .$$

Wegen der Nichtentartetheit von b gilt also $z = 0$, und dann ist T als ein abgeschlossener im ganzen Raum definierter linearer Operator eines vollständigen Raumes beschränkt. □

Wir sind vorwiegend für den Banachschen Fall interessiert. Die Folgerung (a') $\Rightarrow$ (c'') des obigen Satzes kann zur Erweiterung einer gegebenen Quasiinvolution folgendermaßen benutzt werden: Es sei gegeben eine Quasiinvolution $* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(Y)$, wo X und Y Banachräume sind derart, daß $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A}$ und $\mathcal{K}_0(Y) \subset \mathcal{B}$ gilt. Wenn $*$ als eine durch eine beschränkte nichtentartete Sesquilinear- oder Bilinearform definierte Adjunktion dargestellt werden kann, beschließen wir aus (a') $\Rightarrow$ (c''), daß man $*$ auf $\mathcal{B}(X)$ (als eine Quasiinvolution) so erweitern kann, daß $*(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(Y)$ gilt. Das ist immer der Fall (Folgerung 5.7).

4. Konstruktion $(\alpha , \tilde{\alpha})$-linearer Formen in einigen minimalen Idealen

In diesem Abschnitt seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Algebren über demselben Körper $\boldsymbol{K}$, und sei $* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine $\tilde{\alpha}$-lineare Quasiinvolution:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^* = \tilde{\alpha}_1 x_1^* + \tilde{\alpha}_2 x_2^* , \qquad (x y)^* = y^* x^* , \qquad + = *^{-1} .$$

Nehmen wir an, daß $\mathcal{A}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(4.1) Es gibt ein minimales Linksideal in $\mathcal{A}$.

(4.2) Für alle von Null verschiedenen Ideale $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ gilt $\mathcal{I}^2 \neq (0)$.

(Das heißt: Es existiert $x \in \mathcal{I}$ und $y \in \mathcal{I}$ mit $x\,y \neq 0$).

Falls $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ ein minimales Linksideal ist, folgt aus (4.2), daß $\mathcal{L} = \mathcal{A}\,p$, $p^2 = p\ (\neq 0)$ gilt, wo $p\,\mathcal{A}\,p$ eine Divisionsalgebra [4]) mit Einselement p ist [16: S. 45, Lemma (2.1.5)].

Wenn $\mathcal{A}$ eine komplexe Banachalgebra ist, gilt dann nach dem Satz von Gelfand und Mazur [14: S. 189]:

(4.3) Für jedes $x \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathcal{L}$ existiert $\lambda \in \boldsymbol{K}$ derart, daß

$$a\,x\,a = \lambda\,a \quad \text{gilt}.$$

Im reellen Fall und in dem komplexen Fall, wo keine Norm erklärt ist, zeigt sich die Erfüllung der Bedingung (4.3) komplizierter. Wir werden dieses Problem hier nicht untersuchen, und verwenden (4.3) im folgenden Satz als eine zusätzliche Annahme.

Satz 4.1. *Es sei vorausgesetzt, daß $\mathcal{A}$ den Bedingungen (4.1)—(4.3) mit einem minimalen Linksideal $\mathcal{L} = \mathcal{A}\,p$, $p^2 = p$, genügt.*

Dann ist $\mathcal{L}_1 = \mathcal{B}\,p^*$ ein minimales Linksideal in $\mathcal{B}$, und es gibt eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte $(x, \tilde{x})$-lineare Form $b_0 : \mathcal{L} \times \mathcal{L}_1 \to \boldsymbol{K}$ mit der Eigenschaft

(4.4) $b_0(z\,x, y) = b_0(x, z^*\,y)$, $\forall\, x \in \mathcal{L}$, $\forall\, y \in \mathcal{L}_1$, $\forall\, z \in \mathcal{A}$.

Jede solche von Null verschiedene Form ist genau dann nichtentartet, wenn die folgenden Bedingungen mit $\mathcal{R} = p\,\mathcal{A}$ erfüllt sind:

(4.5a) $\mathcal{R}\,x = (0)$, $x \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad x = 0$,

(4.5b) $x\,\mathcal{L} = (0)$, $x \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

Beweis. Weil auch $p^* \in \mathcal{B}$ idempotent ist, weil $p^*\,\mathcal{B}\,p^*$ eine Divisionsalgebra ist und weil Bedingung (4.2) auch für $\mathcal{B}$ gilt, definiert $\mathcal{L}_1 = \mathcal{B}\,p^*$ ein minimales Linksideal in $\mathcal{B}$ [16: S. 45, Lemma (2.1.8)].

Es seien $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{L}_1$. Dann ist $x = x\,p$, $y = y\,p^*$, und wir erhalten

$$y^+\,x = (y\,p^*)^+\,x\,p = p\,y^+\,x\,p = b_0(x, y)\,p.$$

Diese Gleichung definiert die $(x, \tilde{x})$-lineare Form $b_0 : \mathcal{L} \times \mathcal{L}_1 \to \boldsymbol{K}$ so, daß

[4]) Eine Algebra mit Einselement wird *Divisionsalgebra* genannt, wenn jedes vom Nullelement verschiedene Element regulär ist.

$$b_0(\mathrm{z\,x}\,,\mathrm{y})\,\mathrm{p} = \mathrm{y}^+(\mathrm{z\,x}) = (\mathrm{z}^*\mathrm{y})^+\mathrm{x} = b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{z}^*\mathrm{y})\,\mathrm{p}$$

gilt. Es sei b_1 auch eine (4.4) erfüllende Form in $\mathcal{L}\times\mathcal{L}_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b_1(\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) &= b_1(\mathrm{x}\,,\mathrm{y\,p}^*) = b_1(\mathrm{y}^+\mathrm{x}\,,\mathrm{p}^*) = b_1(b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})\,\mathrm{p}\,,\mathrm{p}^*) \\ &= b_1(\mathrm{p}\,,\mathrm{p}^*)\,b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})\,. \end{aligned}$$

Die letzten Behauptungen sind trivial, weil $\mathcal{R} = +(\mathcal{L}_1)$ ist. □

Die Konstruktion im obigen Satz ist nicht effektiv genug für die Betrachtung der Symmetrieeigenschaften von einigen $(\alpha\,,\tilde{\alpha})$-linearen Formen in Vektorräumen.

Satz 4.2. *Es sei* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ *und* $*: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ *eine* $\tilde{\alpha}$*-lineare Quasiinvolution. In allen minimalen Linksidealen* $\mathcal{L}\subset\mathcal{A}$ *mit den Eigenschaften*

(a) $\mathcal{L}^2 \neq (0)$,

(b) $\mathrm{a\,x\,a} = \lambda\,\mathrm{a}$ für alle $\mathrm{x}\in\mathcal{A}\,,\ \mathrm{a}\in\mathcal{L}$,

(c) $(+\mathcal{L})\,\mathrm{x} = (0)\,,\ \mathrm{x}\in\mathcal{L} \Rightarrow \mathrm{x} = 0$,

(d) $(*\mathcal{L})\,\mathrm{x} = (0)\,,\ \mathrm{x}\in\mathcal{L} \Rightarrow \mathrm{x} = 0$,

kann man eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte nichtentartete $(\alpha\,,\tilde{\alpha})$*-lineare Form* $b_0 : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to \boldsymbol{K}$ *so konstruieren, daß*

(4.6) $\quad b_0(\mathrm{z\,x}\,,\mathrm{y}) = b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{z}^*\mathrm{y})\,,\quad \forall\,\mathrm{x}\in\mathcal{L}\,,\ \forall\,\mathrm{y}\in\mathcal{L}\,,\ \forall\,\mathrm{z}\in\mathcal{A}\,,$

gilt.

Beweis. Es gibt zwei (a priori) Möglichkeiten

(1) $\exists\,\mathrm{p}\in\mathcal{L}:\ \mathrm{p}^*\mathrm{p}\neq 0$,

(2) Für alle $\mathrm{p}\in\mathcal{L}$ gilt $\mathrm{p}^*\mathrm{p} = 0$.

Tatsächlich wird es sich zeigen, daß für $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ und $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$ nur (1) möglich ist (und in den Fällen $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ oder $= \boldsymbol{R}$ und $\tilde{\alpha} = \alpha$ sowohl (1) als (2) möglich sind).

Fall (1): Es sei $\mathrm{p}\in\mathcal{L}:\ \mathrm{p}^*\mathrm{p}\neq 0$. Weil $\mathcal{A}\,\mathrm{p}^*\mathrm{p}\subset\mathcal{L}$ und $\mathcal{A}\,\mathrm{p}^*\mathrm{p}$ ein Linksideal in $\mathcal{A}$ ist, gilt wegen der Minimalität von $\mathcal{L}$ entweder $\mathcal{A}\,\mathrm{p}^*\mathrm{p} = (0)$ oder $\mathcal{A}\,\mathrm{p}^*\mathrm{p} = \mathcal{L}$. Wäre $\mathcal{A}\,\mathrm{p}^*\mathrm{p} = (0)$, könnten wir aus der Relation $(*\,\mathcal{L})\,\mathrm{p}^*\mathrm{p}\subset\mathcal{A}\,\mathrm{p}^*\mathrm{p} = (0)$ auf einen Widerspruch $\mathrm{p}^*\mathrm{p} = 0$ schließen. Also gilt $\mathcal{L} = \mathcal{A}\,\mathrm{p}^*\mathrm{p}$.

Es seien $\mathrm{x}\,,\mathrm{y}\in\mathcal{L}:\ \mathrm{x} = \mathrm{x}'\,\mathrm{p}^*\mathrm{p}\,,\ \mathrm{y} = \mathrm{y}'\,\mathrm{p}^*\mathrm{p}\,,\ \mathrm{x}'\,,\mathrm{y}'\in\mathcal{A}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{y}^+\mathrm{x} &= (\mathrm{y}'\,\mathrm{p}^*\mathrm{p})^+\mathrm{x}'\,\mathrm{p}^*\mathrm{p} = \mathrm{p}^-\mathrm{p}\,\mathrm{y}'^-\mathrm{x}'\,\mathrm{p}^*\mathrm{p} \\ &= \mathrm{p}^+ b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})\,\mathrm{p} = b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})\,\mathrm{p}^-\mathrm{p}\,. \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{p}^*\mathrm{p}\neq 0$ gilt auch $\mathrm{p}^+\mathrm{p} = (\mathrm{p}^*\mathrm{p})^-\neq 0$, und darum definiert die obige Gleichung eine $(\alpha\,,\tilde{\alpha})$-lineare Form $b_0 : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\boldsymbol{K}$.

Fall (2): Es sei p ein festes von Null verschiedenes Element aus $\mathcal{L}$. Infolge der Bedingung (d) gibt es ein Element $\mathrm{q}\in\mathcal{L}$ so, daß $\mathrm{q}^*\mathrm{p}\neq 0$.

Aber weil $\mathrm{p} + \lambda\,\mathrm{q}\in\mathcal{L}$ für alle $\lambda\in\boldsymbol{K}$ gilt, erhalten wir

$$(\mathrm{p} + \lambda\, \mathrm{q})^* (\mathrm{p} + \lambda\, \mathrm{q}) = 0\,, \qquad \forall\, \lambda \in \boldsymbol{K}\,,$$

oder

$$\mathrm{p}^*\, \mathrm{p} + \lambda\, \mathrm{p}^*\, \mathrm{q} + \tilde{\lambda}\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p} + \lambda\, \tilde{\lambda}\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{q} = 0\,, \qquad \forall\, \lambda \in \boldsymbol{K}\,,$$

und folglich

$$\lambda\, \mathrm{p}^*\, \mathrm{q} + \tilde{\lambda}\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p} = 0\,, \qquad \forall\, \lambda \in \boldsymbol{K}\,,$$

weil $\mathrm{p}^*\, \mathrm{p} = \mathrm{q}^*\, \mathrm{q} = 0$.

Falls $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ und $\tilde{\lambda} = \bar{\lambda}$ wäre, könnten wir mit $\lambda = 1$ und $\lambda = i$ die Relationen $\mathrm{p}^*\, \mathrm{q} = \mp\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p}$ erzielen, das heißt $\mathrm{q}^*\, \mathrm{p} = 0$, und dies ist nicht möglich.

In den anderen Fällen ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ mit $\tilde{\lambda} = \lambda$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ [5])) erhalten wir $\mathrm{q}^*\, \mathrm{p} = -\, \mathrm{p}^*\, \mathrm{q} \neq 0$.

So wie in Fall (1) ist die Relation $\mathcal{L} = \mathcal{A}\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p}$ nachzuweisen, und für $\mathrm{x}\,,\mathrm{y} \in \mathcal{L}$, $\mathrm{x} = \mathrm{x}'\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p}$, $\mathrm{y} = \mathrm{y}'\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p}$ erhalten wir

$$\mathrm{y}^+\, \mathrm{x} = (-\, \mathrm{y}'\, \mathrm{p}^*\, \mathrm{q})^+\, \mathrm{x}'\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p} = -\, \mathrm{q}^+\, \mathrm{p}\, \mathrm{y}'^+\, \mathrm{x}'\, \mathrm{q}^*\, \mathrm{p} = b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})\, \mathrm{q}^+\, \mathrm{p}\,.$$

Weil $\mathrm{p}^*\, \mathrm{q} \neq 0$ ist, gilt $\mathrm{q}^+\, \mathrm{p} = (\mathrm{p}^*\, \mathrm{q})^+ \neq 0$, und die Gleichung definiert eine bilineare Form $b_0 : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \boldsymbol{K}$.

Die Eindeutigkeitsaussage und Gleichung (4.6) werden wie im Satz 4.1 bestätigt.

Die Nichtentartetheit folgt aus den folgenden Relationen für $\mathrm{x} \in \mathcal{L}$:

$$(+\mathcal{L})\, \mathrm{x} = (0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{y}^+\, \mathrm{x} = 0\,,\ \forall\, \mathrm{y} \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad b_0(\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) = 0\,,\ \forall\, \mathrm{y} \in \mathcal{L}\,,$$

$$(*\mathcal{L})\, \mathrm{x} = (0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{y}^*\, \mathrm{x} = 0\,,\ \forall\, \mathrm{y} \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x}^+\, \mathrm{y} = 0\,,\ \forall\, \mathrm{y} \in \mathcal{L}$$

$$\Leftrightarrow b_0(\mathrm{y}\,,\mathrm{x}) = 0\,,\ \forall\, \mathrm{y} \in \mathcal{L}\,. \ \square$$

Beispiel 4.3. Es sei $\mathcal{A}$ eine Matrixalgebra über $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}$ ist $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta \in \boldsymbol{K} \right\},$$

in der die Operationen wie üblich definiert sind und in der eine lineare Involution $*$ durch die Zuordnung

$$A^* = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Dann gilt

$$A^*\, A = \begin{pmatrix} \alpha\,\delta - \beta\,\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \end{pmatrix},$$

[5]) Ein Beispiel der Möglichkeit von (2) in diesen Fällen wird nach dem Beweis gegeben.

wo $\alpha\delta - \beta\gamma = \det A = 0$, wenn A zu einem minimalen Linksideal $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$ gehört (denn A ist notwendigerweise nichtregulär). In diesem Fall gilt also $(*\mathcal{L})\,\mathcal{L} = (0)$.

Wir betrachten separat die Symmetrie- und Beschränktheitseigenschaften.

Folgerung 4.4. *Es sei $*$ eine Involution und b_0 die im obigen Satz konstruierte Form. In Fall (1) ist b_0 symmetrisch und in Fall (2) schiefsymmetrisch.*

Beweis. Fall (1): Es gilt $y^*x = b_0(x, y)\, p^*p$, und die Behauptung folgt aus der Relation

$$b_0(y, x)\, p^*p = x^*y = (y^*x)^* = (b_0(x, y)\, p^*p)^* = (b_0(x, y))^{\sim}\, p^*p .$$

Fall (2): Es gilt $y^*x = b_0(x, y)\, q^*p$ und darum

$$\begin{aligned} b_0(y, x)\, q^*p &= x^*y = (b_0(x, y)\, q^*p)^* = b_0(x, y)\, p^*q \\ &= -\, b_0(x, y)\, q^*p . \quad \square \end{aligned}$$

Wenn insbesondere die Quasiinvolution $*$ a-symmetrisch ist, $x^+ = a\, x^*\, a^{-1}$, $a^* = a^{-1}$, folgt aus der Darstellung

$$y^+x = b_0(x, y)\, g, \qquad g = p^+p \quad \text{oder} \quad q^+p$$

die Relation

$$\begin{aligned} (b_0(y, x))^{\sim}\, g^* &= (x^+y)^* = y^*x = a^{-1}y^+a\,x = a^{-1}(y^+a\,x) \\ &= a^{-1}((a^{-1}y)^+x) = a^{-1}\,b_0(x, a^{-1}y)\, g \\ &= b_0(x, a^*y)\, a^{-1}g = b_0(a\,x, y)\, a^{-1}g \\ &= b_0(\lambda\, a\, x, y)\, \lambda^{-1}a^{-1}g \qquad \text{für } \lambda \neq 0 , \end{aligned}$$

und damit die Relation

$$(4.7) \qquad b_0(y, x) = (b_0(\lambda\, a\, x, y))^{\sim} \Leftrightarrow g^* = \lambda^{-1}a^{-1}g , \qquad \lambda \neq 0 .$$

Die linke Seite bedeutet, daß die Form b_0 $T_{\lambda a}$-symmetrisch ist, wenn man $T_a \in \mathcal{L}(\mathcal{L})$ so setzt, daß

$$T_a x = a\,x, \qquad \forall\, x \in \mathcal{L} ,$$

ist.

Es seien $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ und $(\mathcal{B}, |\cdot|)$ normierte Algebren. Dann sind $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ und $(\mathcal{L}_1, |\cdot|)$ normierte Räume, und die Operatoren T_a, $a \in \mathcal{A}$, und T_b, $b \in \mathcal{B}$, sind stetige Transformationen bezüglich der entsprechenden Normen:

$$(4.8) \qquad \|T_a\| = \sup_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{\|T_a\, x\|}{\|x\|} = \sup_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{\|a\, x\|}{\|x\|} \leqq \|a\| ,$$

entsprechend $|T_b| \leqq |b|$.

Satz 4.5. *Es seien* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *und* $(\mathcal{B}, |\cdot|)$ *normierte Algebren. Ferner setze man foraus, daß die Annahmen von Satz 4.1 bzw. 4.2 gelten. Dann sind die Repräsentationen* $\mathrm{a} \to T_{\mathrm{a}}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{L})$ *und* $\mathrm{b} \to T_{\mathrm{b}}$, $\mathcal{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{L}_1)$ *stetig. Wenn* $*$ *oder* $+$ *stetig ist, sind die in Satz 4.1 bzw. Sats 4.2 konstruierten Formen* b_0 *stetig bezüglich der entsprechenden Normen.*

Beweis. Es gilt $\mathrm{y}^+ \mathrm{x} = b_0(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{g}$ und $\mathrm{x}^* \mathrm{y} = (b_0(\mathrm{x}, \mathrm{y}))^{\sim}\, \mathrm{g}^*$ wobei $\mathrm{g} = \mathrm{p}, = \mathrm{p}^+ \mathrm{p}$ oder $= \mathrm{q}^+ \mathrm{p}$ ist. Dann erhalten wir:

$$|b_0(\mathrm{x}, \mathrm{y})| = \|\mathrm{g}\|^{-1} \|\mathrm{y}^+ \mathrm{x}\| \leqq \|\mathrm{g}\|^{-1} \|\mathrm{y}^+\| \|\mathrm{x}\| \leqq \lambda \|\mathrm{g}\|^{-1} \|\mathrm{x}\| |\mathrm{y}|,$$

wenn $+$ stetig ist, und

$$|b_0(\mathrm{x}, \mathrm{y})| = |\mathrm{g}^*|^{-1} |\mathrm{x}^* \mathrm{y}| \leqq |\mathrm{g}^*|^{-1} |\mathrm{x}^*| |\mathrm{y}| \leqq \gamma |\mathrm{g}^*|^{-1} \|\mathrm{x}\| |\mathrm{y}|$$

wenn $*$ stetig ist. $\square$

5. Eine Anwendung auf Operatorenalgebren

In diesem Abschnitt wenden wir die Sätze des vorigen Abschnitts auf dichte Operatorenalgebren mit minimalen Idealen an.

Satz 5.1. *Es seien* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *dichte Operatorenalgebren der Vektorräume* X *und* Y *so, daß* $\mathcal{A} \cap \mathcal{K}(X) \neq (0)$ *gilt, und sei* $* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *eine* $\tilde{\alpha}$*-lineare Quasiinvolution. Dann gibt es eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte nichtentarte* $(\alpha, \tilde{\alpha})$*-lineare Form* $b : X \times Y \to \mathbf{K}$ *so, daß*

$$b(T x, y) = b(x, T^* y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall T \in \mathcal{A}, \tag{5.1}$$

gilt.

Beweis. Weil $\mathcal{A} \cap \mathcal{K}(X) \neq (0)$ gilt, ist Bedingung (4.1) erfüllt. Falls $T \in \mathcal{A}$ von Null verschieden ist, $T x = y \neq 0$, kann man $U \in \mathcal{A}$ so wählen, daß $U y = x$ gilt, und dann ist $0 \neq T U T \in \mathcal{I}^2$ mit $\mathcal{I}, T \in \mathcal{I}$. Also ist auch (4.2) erfüllt.

Weil alle Elemente eines minimalen Linksideals von $\mathcal{A}$ höchstens eindimensionale Operatoren von X sind, ist (4.3) erfüllt (Lemma 2.3).

Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{A} P$, $P = u \otimes f$, $f(u) = 1$, ein minimales Linksideal in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{R} = P \mathcal{A}$. Falls $T \in \mathcal{L}$ von Null verschieden ist, $T = x \otimes f$, $x \neq 0$, ergibt sich mit $A \in \mathcal{A}$, $A x \notin N(P)$,

$$P A T = (P A x) \otimes f \neq 0,$$

und (4.5a) ist erfüllt. Für (4.5b) bemerken wir die Äquivalenz

$$A \mathcal{L} = (0) \iff (A x) \otimes f = 0, \forall x \in X \iff A x = 0, \forall x \in X.$$

Aus Satz 4.1 folgt die Existenz einer solchen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmten nichtentarteten $(\alpha, \tilde{\alpha})$-linearen Form $b_0 : \mathcal{L} \times \mathcal{L}_1 \to \boldsymbol{K}$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{B} P^*$, daß

$$b_0(U\,T\,, S) = b_0(T\,, U^*\,S)\,, \qquad \forall\, T \in \mathcal{L}\,, \forall\, S \in \mathcal{L}_1\,, \forall\, U \in \mathcal{A}\,,$$

gilt.

Falls $\mathcal{L}_1 = \{\, y \otimes g \mid y \in Y \,\}$, $g \in Y'$, sind die Abbildungen $x \to x \otimes f : X \to \mathcal{L}$ und $y \to y \otimes g : Y \to \mathcal{L}_1$ Isomorphismen (linear und bijektiv), und durch

$$b(x\,, y) = b_0(x \otimes f\,, y \otimes g)$$

wird eine nichtentartete $(\alpha\,, \tilde{\alpha})$-lineare Form $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ so eingeführt, daß

$$\begin{aligned} b(T\,x\,, y) &= b_0((T\,x) \otimes f\,, y \otimes g) = b_0(T\,(x \otimes f)\,, y \otimes g) \\ &= b_0(x \otimes f\,, T^*\,(y \otimes g)) = b_0(x \otimes f\,, (T^*\,y) \otimes g) \\ &= b(x\,, T^*\,y) \end{aligned}$$

ist. Die Eindeutigkeitsaussage gilt wegen der entsprechenden Eigenschaft von b_0. $\square$

Lemma 5.2. *Es seien $\mathcal{A}$ eine dichte Operatorenalgebra des Vektorraumes X mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{R}(X) \neq (0)$ und $*$ eine Quasiinvolution $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Für ein minimales Linksideal $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ gilt*

$$(*\,\mathcal{L})\,T = (0)\,,\ T \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad T = 0\,.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für $T \in \mathcal{L}$, $T \neq 0$, ein $U \in \mathcal{L}$: $U^*\,T \neq 0$, existiert. Für $\mathcal{L} = \mathcal{A}\,P$ und $T\,e \neq 0$ können wir wegen $P^* \neq 0$ und wegen der Dichtheit von $\mathcal{A}$ einen Operator $S \in \mathcal{A}$ mit $P^*\,S\,T\,e \neq 0$ wählen. Mit $U = S^+\,P$ erhält man $U \in \mathcal{A}\,P = \mathcal{L}$ und

$$U^*\,T\,e = (S^+\,P)^*\,T\,e = P^*\,S\,T\,e \neq 0\,. \ \square$$

Satz 5.3. *Es seien $\mathcal{A}$ eine dichte Operatorenalgebra des Vektorraumes X mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{R}(X) \neq (0)$ und $*$ eine $\tilde{\alpha}$-lineare Quasiinvolution in $\mathcal{A}$. Dann gilt:*

(a) *Jede Bedingung (5.1) erfüllende nichtentartete $(\alpha\,, \tilde{\alpha})$-lineare Form b ist B-symmetrisch für einen (von b abhängigen) Operator B* [6].

(b) *Wenn $*$ A-symmetrisch ist, gilt $B = \lambda\,A$, $\lambda\,\tilde{\lambda} = 1$.*

(c) *Falls $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ und $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$ ist, genügt $*$ der Bedingung*

$$(5.2) \qquad \exists\, T_0 \in \mathcal{A} : \quad \dim R(T_0) = 1\,, \quad T_0^*\,T_0 = 0\,.$$

[6]) Wenn $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ und $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$ ist, gibt es einen festen Operator B derart, daß alle diese Formen $\lambda\,B$-symmetrisch ($|\lambda| = 1$) sind. Wenn $\tilde{\alpha} = \alpha$ ist, sind alle Formen b symmetrisch für einen festen Operator B.

(d) *Wenn* $*$ *eine Involution ist, können wir die Form* b *symmetrisch wählen vorausgesetzt, daß (5.2) erfüllt ist. Falls (5.2) nicht erfüllt ist, ist* b *schiefsymmetrisch.*

Beweis. Eigenschaft (a) folgt aus Satz 3.5, und der Beweis von Satz 4.2 zeigt die Richtigkeit von Behauptung (c). Für weitere Symmetrieeigenschaften konstatieren wir, daß aus dem obigen Lemma und Satz 4.2 (vgl. auch den Beweis von 5.1) die Existenz einer $(\alpha, \tilde{\alpha})$-linearen Form $b_0 : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \boldsymbol{K}$, wo $\mathcal{L}$ ein minimales Linksideal in $\mathcal{A}$ ist, derart folgt, daß [7])

$$T^+ S = b_0(S, T)\, G, \qquad G = P^+ P \quad \text{oder} \quad G = Q^+ P,$$

gilt.

Behauptung (d) folgt aus Folgerung 4.4, weil $b(x, y) = b_0(x \otimes f, y \otimes f)$, $\mathcal{L} = \{ x \otimes f \mid x \in X \}$ auch eine (5.1) erfüllende Form in X definiert.

Es sei $T^+ = A\, T^* A^{-1}$, $A^* = A^{-1}$. Wenn $P = u \otimes f$ ist, gilt wegen $P^+ P \neq 0$ auch $P^+ u \neq 0$ und darum wegen der Eindimensionalität von P^+

$$P^+ A\, P = (P^+ A\, u) \otimes f = (\xi\, P^+ u) \otimes f = \xi\, P^+ P .$$

Weiter erhält man

$$P^* A^* P = (P^+ A\, P)^* = (\xi\, P^+ P)^* = \tilde{\xi}\, P^* P ,$$

oder

$$A^{-1} P^+ A\, A^* P = \tilde{\xi}\, A^{-1} P^+ A\, P .$$

Es folgt wegen $A^* = A^{-1}$

$$P^+ P = \tilde{\xi}\, P^+ A\, P = \xi\, \tilde{\xi}\, P^+ P ,$$

also ist $\xi\, \tilde{\xi} = 1$.

Entsprechend beschließen wir die Relation $Q^+ A\, P = \mu\, Q^+ P$ und folglich

$$P^* A^* Q = \tilde{\mu}\, P^* Q = -\, \tilde{\mu}\, Q^* P ,$$

woraus folgt $A^{-1} P^+ Q = -\, \tilde{\mu}\, A^{-1} Q^+ A\, P$, also

$$P^+ Q = -\, \tilde{\mu}\, Q^+ A\, P = -\, \mu\, \tilde{\mu}\, Q^+ P = \mu\, \tilde{\mu}\, P^+ Q .$$

Auch in diesem Fall ist $\mu\, \tilde{\mu} = 1$.

Die Relationen $P^+ A\, P = \xi\, P^+ P$, $Q^+ A\, P = \mu\, Q^+ P$, $\xi\, \tilde{\xi} = \mu\, \tilde{\mu} = 1$ bedeuten, daß immer

[7]) Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie in Satz 4.2, nur die kleinen Buchstaben werden durch die großen ersetzt.

$$G^* = \eta\, A^{-1}\, G\,, \qquad \eta\,\tilde{\eta} = 1\,,$$

und darum wegen der Äquivalenz (4.7) auch

$$b_0(T\,,S) = (b_0(\lambda\, A\, S\,,T))^{\sim}\,, \qquad \lambda\,\tilde{\lambda} = 1\,,$$

gilt. Hieraus ergibt sich die Behauptung (b) mit Hilfe von $b_1(x\,,y) = b_0(x \otimes f\,, y \otimes f)$. □

Wir betrachten die Beschränktheitseigenschaften der Form b .

Lemma 5.4. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dichte Operatorenalgebren der Vektorräume X und Y mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{K}(X) \neq (0)$ so, daß $(\mathcal{A}\,, \|\cdot\|)$ und $(\mathcal{B}\,, |\cdot|)$ Banachalgebren sind, und sei $*: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Quasiinvolution. Dann ist $*$ ein Homöomorphismus.*

Bewies. Wir definieren in $\mathcal{A}$ eine neue Norm $\|\cdot\|_1$:

$$\|T\|_1 = |T^*|\,, \qquad \forall\, T \in \mathcal{A}\,.$$

Weil $(\mathcal{B}\,, |\cdot|)$ eine Banachalgebra ist, ist auch $(\mathcal{A}\,, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra. Aber wegen der Dichtheit von $\mathcal{A}$ und wegen der Relation $\mathcal{A} \cap \mathcal{K}(X) \neq (0)$ sind alle Banachalgebranormen in $\mathcal{A}$ äquivalent [16: S. 73, Corollary (2.5.10)]. Dann folgt aus den Ungleichungen

$$\alpha\, \|T\| \leqq \|T\|_1 \leqq \beta\, \|T\|\,, \qquad \forall\, T \in \mathcal{A}\,,$$

die Relation

$$|T^*| = \|T\|_1 \leqq \beta\, \|T\|\,, \qquad \forall\, T \in \mathcal{A}\,,$$

und damit die Stetigkeit von $*$, und aus der Relation

$$\alpha\, \|S^+\| \leqq \|S^+\|_1 = |(S^+)^*| = |S|\,, \qquad \forall\, S \in \mathcal{B}\,,$$

folgt die Beschränktheit von $+ = *^{-1}$. □

Satz 5.5. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dichte Operatorenalgebren der Vektorräume X und Y mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{K}(X) \neq (0)$ so, daß $(\mathcal{A}\,, \|\cdot\|_0)$ und $(\mathcal{B}\,, |\cdot|_0)$ Banachalgebren sind und sei $*: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Quasiinvolution. Dann gibt es in X und Y vollständige Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ so, daß bezüglich dieser Normen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(Y)$ gilt, und daß jede (5.1) erfüllende $(\chi\,, \tilde{\chi})$-lineare Form b bezüglich dieser Normen beschränkt ist. Weiter gilt $\|A\| \leqq \|A\|_0$ bzw. $|B| \leqq |B|_0$, wo $\|\cdot\|$ bzw. $|\cdot|$ die entsprechende Operatornorm ist.*

Beweis. Es seien $u \in X$, $v \in Y$ zwei von Null verschiedene Vektoren. Weil $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dicht sind, definieren die Gleichungen

$$\|x\| = \inf\{\, \|T\|_0 \mid T\,u = x\,,\ T \in \mathcal{A}\,\}\,,$$

$$|y| = \inf\{\, |S|_0 \mid S\,v = y\,,\ S \in \mathcal{B}\,\}\,,$$

die Banachnormen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ in X und Y so, daß $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$

und $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(Y)$ mit $\|A\| \leqq \|A\|_0$, $|B| \leqq |B|_0$ gilt [16: S. 52, Theorem (2.2.6)]. Wenn weiter

$$\mathcal{L} = \{ x \otimes f \mid x \in X \}, \quad f \in X',$$

$$\mathcal{L}_1 = \{ y \otimes g \mid y \in Y \}, \quad g \in Y',$$

minimale Linksideale in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind, sind die von den Isomorphismen $x \to x \otimes f$, $y \to y \otimes g$ definierten Normen $\|\cdot\|_1 : \|x\|_1 = \|x \otimes f\|_0$, $|\cdot|_1 : |y|_1 = |y \otimes g|_0$ äquivalent mit den Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ [16: S. 67, Lemma (2.4.13)]. Mit den früheren Bezeichnungen folgt aus der Stetigkeit von $*$ und aus den Äquivalenzen $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$, $|\cdot| \sim |\cdot|_1$ die Ungleichung:

$$\begin{aligned} |b(x, y)| &= |\lambda\, b_0(x \otimes f, y \otimes g)| \leqq \gamma' \|x \otimes f\|_0 |y \otimes g|_0 \\ &= \gamma' \|x\|_1 |y|_1 \leqq \gamma \|x\| |y| . \quad \square \end{aligned}$$

Folgerung 5.6. *Wenn* $(X, \|\cdot\|_0)$, $(Y, |\cdot|_0)$ *Banachräume sind und* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *Banachalgebren bezüglich entsprechender Operatornormen* $\|\cdot\|_0$, $|\cdot|_0$ *bezeichnen, gilt* $|b(x, y)| \leqq \gamma \|x\|_0 |y|_0$.

Beweis. Wenn $\|x\| = \inf\{ \|T\|_0 \mid Tu = x,\ T \in \mathcal{A} \}$ ist, gilt für x, $T u = x$

$$\|x\|_0 = \|T u\|_0 \leqq \|T\|_0 \|u\|_0 ,$$

woraus $\|x\| \geqq \|u\|_0^{-1} \|x\|_0$ folgt. Aber dann sind die Banachnormen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_0$ bzw. $|\cdot|$ und $|\cdot|_0$ äquivalent. $\square$

Es folgt direkt aus Satz 3.7:

Folgerung 5.7. *Es sei* $* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *eine Quasiinvolution, wo* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *Banachalgebren bezüglich der Operatornormen der Banachräume* X *und* Y *so sind, daß* $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ *und* $\mathcal{K}_0(Y) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}(Y)$ *gilt. Dann kann* $*$ *auf* $\mathcal{B}(X)$ *so erweitert werden, daß* $* \mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(Y)$ *ist.*

Wir bemerken noch, daß Satz 3.7 und Folgerung 5.6 die Charakterisierung aller solchen nichtentarteten Bilinear- oder Sesquilinearformen $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$ (X und Y Banachräume) ermöglichen, die für jeden beschränkten Operator einen beschränkten adjungierten Operator definieren:

Satz 5.8. *Für eine nichtentartete Bilinear- oder Sesquilinearform* $b : X \times Y \to \boldsymbol{K}$, *wo* X *und* Y *Banachräume sind, sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $\mathcal{A}^r = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{A}^l = \mathcal{B}(Y)$,

(b) $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}^r$, $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{A}^l$, $*(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(Y)$,

(c) b *ist beschränkt, und es gilt* $X^r = X^*$, $Y^l = Y^*$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) : Trivial. (b) $\Rightarrow$ (c) : Folgerung 5.6 und Satz 3.7. (c) $\Rightarrow$ (a) : Satz 3.7. $\square$

6. Charakterisierung einiger indefiniter Räume mit Hilfe einer Involution

Es sei X ein Vektorraum und b eine symmetrische nichtentartete Sesquilinearform darin (dann benutzen wir die Bezeichnung »*Skalarprodukt*«).

Den Raum (X, b) nennen wir einen $\mathfrak{J}$-Raum, wenn ein Hilbertsches Skalarprodukt $[\cdot \mid \cdot]$ und ein bezüglich dieses Skalarprodukts beschränkter Operator J so existieren, daß

$$(6.1)\qquad b(x, y) = [Jx \mid y], \quad \forall\, x, y \in X \quad \text{mit } J = J^{-1} = J^{[*]}$$

ist, wo $[*]$ die Adjunktion bezüglich des Skalarprodukts $[\cdot \mid \cdot]$ bezeichnet. Die Form b ist dann $\|\cdot\|$-beschränkt; $\|\cdot\| = [\cdot \mid \cdot]^{1/2}$.

Wir nehmen an, daß (X, b) ein $\mathfrak{J}$-Raum ist. Aus der Nichtentartetheit von b folgt, daß alle Banachnormen, bezüglich deren b beschränkt ist, äquivalent sind [2: Theorem 4.2]. Dadurch werden im Raum X eine nur von b abhängige vollständige majorante Normtopologie und die Klasse $\mathfrak{B}(X)$ definiert. Wenn wir nicht anders erwähnen, meinen alle topologischen Begriffe im folgenden diese Topologie. Das indefinite Skalarprodukt b bestimmt eine antilineare Involution $*$ mit $\mathscr{A}^r = \mathscr{A}^l = \mathfrak{B}(X)$ und

$$(6.2)\qquad T^* = J\, T^{[*]} J, \quad \forall\, T \in \mathfrak{B}(X).$$

Wenn wir $P_+ = \frac{1}{2}(I + J)$, $P_- = \frac{1}{2}(I - J)$ definieren, gilt

$$(6.3)\qquad J = P_+ - P_-, \quad I = P_+ + P_-,$$

und $P_\pm^* = P_\pm^{[*]} = P_\pm = P_\pm^2$.

Die Projektoren P_+ und P_- bestimmen im Raum X eine Zerlegung

$$(6.4)\qquad X = X_+ \oplus X_-,$$

wo $X_+ = R(P_+)$, $X_- = R(P_-)$ abgeschlossene Teilräume sind und die Summe direkt und orthogonal bezüglich sowohl b als $[\cdot \mid \cdot]$ ist (das heißt $b(x, y) = [x, y] = 0$ für alle $x \in X_+$, $y \in X_-$ gilt.).

Weil $b(x, y) = [x \mid y]$, $x, y \in X_+$ und $b(x, y) = -[x \mid y]$, $x, y \in X_-$, sind (X_+, b) und $(X_-, -b)$ Hilberträume. Die Hilbertschen Dimensionen von Räumen (X_+, b), $(X_-, -b)$ sind von der Zerlegung unabhängig. Das folgt leicht aus [12: S. 109, Lemma 1] unter Berücksichtigung der Äquivalenz der majoranten Normen. Wenn insbesondere die Relation

$$(6.5)\qquad \min\{\dim X_+, \dim X_-\} = k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt, heißt der $\mathfrak{J}$-Raum (X, b) ein k*-indefiniter Pontrjaginscher Raum*. Wenn speziell $k = 0$ ist, ist (X, b) oder $(X, -b)$ ein Hilbertscher Raum.

Es sei $\mathscr{A}$ eine solche $*$-involutorische Teilalgebra von $\mathscr{B}(X)$ (das ist $*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$), daß $J \in \mathscr{A}$ gilt. Dann ist $\mathscr{A}$ auch $[*]$-involutorisch und weil die Hilbertsche Adjunktion $[*]$ der Bedingung

$$(6.6) \qquad T^{[*]}\,T = 0\,,\ T \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad T = 0\,,$$

genügt, gilt für $* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

$$(6.7) \qquad T^*\,J\,T = 0\,,\ T \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad T = 0\,.$$

Sei umgekehrt $(\mathscr{A}\,, \|\cdot\|)$ eine dichte Banachalgebra des Vektorraumes X mit der antilinearen Involution $*$ derart, daß $\mathscr{A} \cap \mathscr{K}(X) \neq (0)$ ist.

Gemäß Satz 5.5 existiert eine bis auf einen von Null verschiedenen konstanten Faktor eindeutig bestimmte nichtentartete Sesquilinearform b in X so, daß

$$(6.8) \qquad b(T\,x\,, y) = b(x\,, T^*\,y)\,, \quad \text{für alle } x\,, y \in X\,,\ T \in \mathscr{A}$$

gilt, und eine bis auf die Normäquivalenz eindeutige vollständige Norm des Raumes X bezüglich deren die Form b beschränkt ist. Eine solche Norm wird mit $\|x\| = \inf\{\,\|T\| \mid T\,u = x\,,\ T \in \mathscr{A}\,\}\,,\ u \neq 0\,,$ definiert. (Vgl. Beweis von 5.5.)

Die Menge aller (6.8) erfüllenden Skalarprodukte sei mit $\mathrm{SP}(*)$ bezeichnet. Für Skalarprodukte $b_1\,, b_2 \in \mathrm{SP}(*)$ gilt $b_2 = \lambda\, b_1\,,\ 0 \neq \lambda \in \boldsymbol{R}\,.$

Nach [16] wird eine normierte Operatorenalgebra $(\mathscr{A}\,, \|\cdot\|)$ eines normierten Raumes $(X\,, \|\cdot\|)$ *stark irreduzibel* genannt, wenn für jedes Element y eine Konstante κ_y so existiert, daß für jedes $x\,,\ \|x\| = 1$ ein $T \in \mathscr{A}$ mit $T\,x = y\,,\ \|T\| \leq \kappa_y$ zu wählen ist. Der eingeführte Begriff ist bezüglich der Normäquivalenz der gegebenen Normen in $\mathscr{A}$ und in X invariant.

Satz 6.1. *Es sei $(\mathscr{A}\,, \|\cdot\|)$ eine dichte vollständige Operatorenalgebra des Vektorraumes X mit der antilinearen Involution $*$ derart, daß $I \in \mathscr{A}$ und $\mathscr{A} \cap \mathscr{K}(X) = (0)$ ist, und sei $(\mathscr{A}\,, \|\cdot\|)$ stark irreduzibel bezüglich der Norm $\|\cdot\| : \|x\| = \inf\{\,\|T\| \mid T\,u = x\,\}\,,\ u \neq 0\,.$ Wenn ein Element $J = J^* = J^{-1} \in \mathscr{A}$ so existiert, daß die Bedingung (6.7) erfüllt ist, gilt*

(a) $\mathrm{SP}(*) \neq (0)$ *und die Form* $b \in \mathrm{SP}(*)$ *hat die Darstellung* $b(x\,, y) = [J\,x \mid y]$ *oder* $b(x\,, y) = [-\,J\,x \mid y]$ *mit einem Hilbertschen Skalarprodukt* $[\,\cdot \mid \cdot\,]$ *so, daß* J *selbstadjungiert bezüglich* $[\,\cdot \mid \cdot\,]$ *ist.*

(b) *Die Norm* $|\cdot|\,,\ |x| = [x \mid x]^{1/2}$ *definiert die majorante Topologie von* b.

(c) *Die Operatoren von* $\mathscr{A}$ *sind beschränkt bezüglich der Norm* $|\cdot|$ *mit* $|T| \leq \gamma\,\|T\|\,,$ *wo* $|\cdot|$ *die entsprechende Operatornorm ist.*

Beweis. Es sei $[*] : \mathscr{A} \to \mathscr{A}\,;\ T^{[*]} = J\,T^*\,J\,.$ Eine einfache Verifizierung zeigt, daß $[*]$ eine antilineare Involution in $\mathscr{A}$ mit $J^{[*]} = J$ ist. Es gilt dabei die Bedingung (6.6). Dann folgt aus [15: Theorem 4.4] (vgl. auch [16: S. 264, Theorem (4.10.7)]), daß ein Hilbertsches Skalarprodukt $[\cdot \mid \cdot]_1$ so existiert, daß $[T x \mid y]_1 = [x \mid T^{[*]} y]_1$ für alle $x, y \in X$, $T \in \mathcal{A}$ gilt und daß die entsprechende Norm $|\cdot|_1$ mit $\|\cdot\|$ äquivalent ist. Wir definieren ein Skalarprodukt b_0: $b_0(x, y) = [J x \mid y]_1$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} b_0(T x, y) &= [J T x \mid y]_1 = [x \mid T^{[*]} J y]_1 \\ &= [J J x \mid T^{[*]} J y]_1 = [J x \mid J T^{[*]} J y]_1 \\ &= b_0(x, J T^{[*]} J y) = b_0(x, T^* y), \end{aligned}$$

also gilt $b_0 \in \mathrm{SP}(*)$. Wenn $b = \lambda b_0$ ein beliebiges Element aus $\mathrm{SP}(*)$ ist, gilt

$$b(x, y) = \lambda [J x \mid y]_1 = [J_1 x \mid y], \quad J_1 = J \quad \text{oder} \quad -J$$

wo $[\cdot \mid \cdot] = |\lambda| [\cdot \mid \cdot]_1$ ein Hilbertsches Skalarprodukt und J_1 selbstadjungiert bezüglich $[\cdot \mid \cdot]$ ist.

Aus der Äquivalenz der Normen $|\cdot|_1$ und $\|\cdot\|$ folgt die Äquivalenz der Normen $|\cdot|$, $|x| = [x \mid x]^{1/2}$ und $\|\cdot\|$, und darum gelten auch (b) und (c) (Satz 5.5). □

Folgerung 6.2. *Es sei $(X, \|\cdot\|_0)$ ein Banachraum und $\mathcal{A}$ eine bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|_0$ vollständige Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$ mit der antilinearen Involution $*$ so, daß $I \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A}$ gilt. Falls ein Element $J = J^* = J^{-1}$ mit (6.7) existiert, sind die majoranten Normen im Ergebnis des obigen Satzes der ursprünglichen Norm äquivalent.*

Beweis. Sei $\|\cdot\|$: $\|x\| = \inf\{\|T\|_0 \mid T u = x, T \in \mathcal{A}\}$, $u \neq 0$. Weil die Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|$ äquivalent sind (vgl. Beweis von Folgerung 5.6), genügt es zu bemerken, daß $\mathcal{K}_0(X)$ stark irreduzibel ist. Aber man kann $\gamma_y = \|y\|_0$ wählen, denn nach einem Satz von Hahn und Banach gibt es für $x \neq 0$ ein beschränktes Funktional f, $f(x) = \|x\|_0$, $\|f\| = 1$ und dann erfüllt $T = y \otimes f$ die Relationen $T \in \mathcal{K}_0(X)$, $T x = f(x) y = y$, $\|T\|_0 = \|f\| \|y\|_0 = \|y\|_0$, wenn $\|x\|_0 = 1$ ist. □

Bemerkung 6.3. *Wegen $b(x, y) = [J x \mid y]$ oder $b(x, y) = [-J x \mid y]$ ist (X, b) ein k-indefiniter Pontrjaginscher Raum, wenn die zusätzliche Bedingung*

$$\min\{\dim R(I + J), \dim R(I - J)\} = k$$

erfüllt ist.

Wir betrachten die Eindeutigkeit von J.

Definition 6.4. *Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement und $*$ eine Involution in $\mathcal{A}$. Die Elemente* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathcal{A}$ *sind unitär äquivalent (in $\mathcal{A}$), wenn ein reguläres Element* $\mathrm{u} \in \mathcal{A}$ *so existiert, daß* $\mathrm{b} = \mathrm{u}^* \mathrm{a} \mathrm{u}$, $\mathrm{u}^* = \mathrm{u}^{-1}$ *gilt.*

Satz 6.5. *Es sei* (X, b) *ein* $\mathcal{J}$*-Raum, und seien* J, J_1 *zwei Operatoren für die Darstellung (6.1) gilt. Dann sind* J *und* J_1 *unitär äquivalent in* $\mathcal{B}(X)$ *(bezüglich der von* b *erzeugten Involution* $*$ *).*

Beweis. Für die entsprechenden Zerlegungen

$$X = X_+ \oplus X_- , \qquad X = X_+^{(1)} \oplus X_-^{(1)}$$

können wir wegen der Hilbertschen Isomorphie der Räume (X_+, b), $(X_+^{(1)}, b)$ und $(X_-, -b)$, $(X_-^{(1)}, -b)$ bijektive lineare Abbildungen $V : X_+ \to X_+^{(1)}$ und $W : X_- \to X_-^{(1)}$ so definieren, daß

$$b(V x, V y) = b(x, y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X_+ ,$$

$$b(W x, W y) = b(x, y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X_- ,$$

gilt.

Mit der Definition

$$U x = V x_+ + W x_- \qquad \text{für} \quad x = x_+ + x_- , \ x_+ \in X_+ , \ x_- \in X_-$$

erhalten wir dann eine bijektive lineare Abbildung $U : X \to X$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} b(U x, U y) &= b(V x_+ + W x_- , V y_+ + W y_-) \\ &= b(V x_+ , V y_+) + b(W x_- , W y_-) = b(x_+ , y_+) + b(x_- , y_-) \\ &= b(x_+ + y_+ , x_- + y_-) = b(x, y) . \end{aligned}$$

Also ist $U \in \mathcal{B}(X)$ [2: Theorem 7.5]. Dann gilt auch $U^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, und die Relation $b(U x, y) = b(U x, U U^{-1} y) = b(x, U^{-1} y)$ zeigt, daß $U^* = U^{-1}$ ist.

Weiter erhalten wir für ein Element $x = x_+ + x_-$

$$\begin{aligned} U^* J_1 U x &= U^{-1} J_1 (V x_+ + W x_-) = U^{-1} (V x_+ - W x_-) \\ &= x_+ - x_- = J x . \ \square \end{aligned}$$

Wir betrachten die Annahmen in Folgerung 6.2. Es seien besonders $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ und $J = J^* = J^{-1}$ so, daß die Involution $*$ die Bedingung (6.7) erfüllt. Falls J_1 dem Operator J unitär äquivalent ist, gilt $J_1 = J_1^* = J_1^{-1}$, und Bedingung (6.7) besteht auch dann, wenn anstelle J der Operator $+ J_1$ oder $- J_1$ gesetzt ist.

Sei umgekehrt $J_1 = J_1^* = J_1^{-1}$ mit (6.7) (J_1 anstelle J). Aus den Darstellungen $b(x, y) = [\pm J x \mid y] = [\pm J_1 x \mid y]_1$ folgt dann, daß J_1 oder $- J_1$ mit J unitär äquivalent ist.

Für echte Teilalgebren $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(X)$ können wir keine entsprechenden Aussagen (betreffend der Unitarität in $\mathcal{A}$) beweisen, denn es fehlt die Relation $U \in \mathcal{A}$.

7. Besondere Betrachtungen für Pontrjaginsche Räume

Man kann die Pontrjaginschen Räume auch mit Hilfe genügend großer Teilalgebren von $\mathcal{B}(X)$ charakterisieren. Dafür werden wir einige fundamentale Bezeichnungen geben.

Es sei b eine symmetrische Sesquilinearform des Vektorraumes X. Es gilt also $b(y, x) = \overline{b(x, y)}$. Insbesondere ist $b(x, x)$ immer reell. und wir können die Elemente von X klassifizieren:

$$
\begin{aligned}
&b(x, x) > 0, && \text{»}x \text{ ist positiv«}, \\
&b(x, x) = 0, && \text{»}x \text{ ist neutral«}, \\
&b(x, x) < 0, && \text{»}x \text{ ist negativ«}, \\
&b(x, x) \geqq 0, && \text{»}x \text{ ist nichtnegativ«}.
\end{aligned}
$$

Der Teilraum (= lineare Mannigfaltigkeit) $M \subset X$ ist *positiv* (*neutral* usw.), wenn jedes von Null verschiedene Element von M positiv (neutral usw.) ist. Besonders gilt für einen neutralen Teilraum M auch: $b(x, y) = 0$ für alle $x, y \in M$.

Lemma 7.1. *Es sei b ein Skalarprodukt in X und $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ eine Algebra mit der Involution $*$ so, daß $b(Tx, y) = b(x, T^* y)$ für alle $x, y \in X$, $T \in \mathcal{A}$ gilt. Für $T \in \mathcal{A}$ sind die Bedingungen*

(a) $T^* T = 0$,

(b) $R(T)$ *neutral*,

äquivalent.

Beweis. Die Bedingung $T^* T x = 0$ für alle $x \in X$ ist wegen der Nichtentartetheit von b mit $b(T^* T x, y) = 0$ für alle $x, y \in X$ äquivalent. Weil $b(T^* T x, y) = b(Tx, Ty)$ ist, ist $T^* T = 0$ mit $b(x', y') = 0$ für alle $x', y' \in R(T)$ äquivalent, was seinerseits wegen der Symmetrie und Sesquilinearität genau die Neutralität von $R(T)$ bedeutet. $\square$

Nach der Terminologie von Bognár [4: S. 61] hat das Skalarprodukt b des Raumes X *einen finiten Rang* k ($k \geqq 0$) *der Indefinitheit*, wenn eine Zerlegung

$$X = X_+ \dot{+} X_- , \tag{7.1}$$

in der X_+ ein positiver Teilraum und X_- ein negativer Teilraum ist und in der die Summe b-orthogonal ist, so existiert, daß

$$\min \{ \dim X_+ , \dim X_- \} = k \tag{7.2}$$

gilt.

Das folgende Lemma ist in [4: Lemma 2] bewiesen worden:

Lemma 7.2. *Das Skalarprodukt b hat einen finiten Rang k der Indefinitheit genau dann wenn die Bedingung*

$$\max\{\dim N \mid N \text{ neutraler Teilraum}\} = k \tag{7.3}$$

erfüllt ist.

Wir erinnern, daß für eine $*$-involutorische Operatorenalgebra $\mathcal{A}$ des Vektorraumes X die Bezeichnung $\mathrm{SP}(*)$ die Menge aller Skalarprodukte b mit $b(Tx, y) = b(x, T^* y)$ für alle $x, y \in X$, $T \in \mathcal{A}$ bedeutet.

Satz 7.3. *Es sei $X \neq (0)$ ein Banachraum und $\mathcal{A}$ eine bezüglich der Operatornorm vollständige Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$ so, daß $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A}$ und $I \in \mathcal{A}$ gilt. Für eine antilineare Involution $*$ von $\mathcal{A}$ sind die folgenden Bedingungen gleichwertig:*

(a) *Es gilt $\mathrm{SP}(*) \neq \emptyset$, und (X, b) ist ein k-indefiniter Pontrjaginscher Raum für ein und damit für alle $b \in \mathrm{SP}(*)$ so, daß die majoranten vollständigen Normen mit der ursprünglichen Norm äquivalent sind.*

(b) *Es gilt $\mathrm{SP}(*) \neq \emptyset$, und ein Skalarprodukt und all die anderen $b \in \mathrm{SP}(*)$ haben einen finiten Rang k der Indefinitheit.*

(c) *Es existiert ein Operator $T_0 \in \mathcal{A}$, $\dim R(T_0) = 1$, $T_0^* T_0 \neq 0$, und die Bedingung*

$$\max\{\dim R(T) \mid T^* T = 0,\ T \in \mathcal{A}\} = k \tag{7.4}$$

ist erfüllt.

(d) *Es existiert ein Operator $J \in \mathcal{A}$,*

$$J = J^* = J^{-1}, \quad \min\{\dim R(I + J), \dim R(I - J)\} = k,$$

und $*$ erfüllt die Bedingung

$$T^* J T = 0, \quad T \in \mathcal{A} \Rightarrow T = 0.$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Eine Folgerung aus den Definitionen.

(b) $\Rightarrow$ (c): Weil für jeden endlichdimensionalen Teilraum N ein Operator $T \in \mathcal{A}$ so existiert, daß $R(T) = N$ ist [8], folgt Bedingung (7.4) aus Lemma 7.1 und 7.2. Weil $b \in \mathrm{SP}(*)$ nichtentartet ist, und $X \neq (0)$ gilt, existiert ein Element x_0: $b(x_0, x_0) \neq 0$. Dann genügt jeder Operator $T_0 \in \mathcal{A}$: $R(T_0) = V\{x_0\}$ den Bedingungen $T_0^* T_0 \neq 0$, $\dim R(T_0) = 1$.

[8] Es sei nämlich $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von N und $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$ mit $f_j(e_i) = \delta_{ij}$ (Lemma 1.1). Wenn

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

ist, gilt dann

$$\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i\right) y = y \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i \in \mathcal{A}.$$

(c) $\Rightarrow$ (a): Aus Folgerung 5.7 folgt, daß die Involution $*$ auf den Raum $\mathcal{B}(X)$ derart erweitert werden kann, daß $*(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(X)$ ist, und diese Erweiterung kann mit Hilfe einer nichtentarteten symmetrischen Sesquilinearform b (vgl. Satz 5.3) so dargestellt werden, daß $b(T\,x\,,\,y) = b(x\,,\,T^*\,y)$ für alle $x\,,\,y \in X\,,\ T \in \mathcal{B}(X)$ gilt. Die Erweiterung genügt den Bedingungen: mindestens für einen eindimensionalen Operator T_0 gilt $T_0^*\,T_0 \neq 0$, und

$$\sup\{\,\dim R(T) \mid T^*\,T = 0\,,\ T \in \mathcal{B}(X)\,\} \geqq k\,.$$

Fall es aber wäre $\sup\{\,\dim R(T) \mid T^*\,T = 0\,,\,T \in \mathcal{B}(X)\,\} > k$, existierte ein neutraler Teilraum N: $\dim N = k+1$, und dann genügte jeder Operator $T \in \mathcal{B}(X)$, $R(T) = N$, den Relationen $T \in \mathcal{A}$, $\dim R(T) = k+1$, $T^*\,T = 0$. Es gilt also auch

$$\max\{\,\dim R(T) \mid T^*\,T = 0\,,\ T \in \mathcal{B}(X)\,\} = k\,,$$

und die Behauptung folgt aus [4: Theorem 3].

(a) $\Rightarrow$ (d): Wenn $(X\,,\,b)$ ein k-indefiniter Pontrjaginscher Raum ist mit $J = J^* = J^{-1}$, $b(x\,,\,y) = [J\,x \mid y]$, wo $[\cdot \mid \cdot]$ ein Hilbertsches Skalarprodukt ist, folgt aus der Bedingung

$$\min\{\,\dim R(I+J)\,,\ \dim R(I-J)\,\} = k\,,$$

daß $I+J \in \mathcal{A}$ oder $I-J \in \mathcal{A}$ gilt, und wegen $I \in \mathcal{A}$ auch $J \in \mathcal{A}$.

(d) $\Rightarrow$ (a): Bemerkung 6.3. $\square$

Im Falle $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ wollen wir eine »spektrale« Charakterisierung für Pontrjaginsche Räume geben.

Es sei b ein Skalarprodukt des Vektorraumes X.

Lemma 7.4. *Wenn N ein k-dimensionaler*[9]) *neutraler Teilraum von X ist, gibt es einen k-dimensionalen neutralen Teilraum M von X mit den Eigenschaften:*

(a) $M \cap N = (0)$,

(b) $K = M \dot{+} N$ *ist nichtentartet,*

(c) $X = K \oplus K^{\perp}$, *wo* $K^{\perp} = \{\,x \in X \mid b(x\,,\,y) = 0\,,\ \forall\, y \in K\,\}$.

Wir können auch linear unabhängige Mengen so wählen, daß $\{e_1\,,\ldots,e_k\} \subset N$, $\{f_1\,,\ldots,f_k\} \subset M$; $b(e_i\,,\,f_j) = \delta_{ij}$, $i\,,\,j = 1\,,\ldots,k$, *ist.*

Beweis. Es seien $\{x_1\,,\ldots,x_k\} \subset N$ linear unabhängig und $\{z_1\,,\ldots,z_k\} \subset X$ so, daß $b(x_i\,,\,z_j) = \delta_{ij}$, $i\,,\,j = 1\,,\ldots,k$ (Lemma 1.1). Wir bezeichnen $L = V\{z_1\,,\ldots,z_k\}$. Dann ist die Summe $K = N + L$ direkt, weil mit

[9]) k ist endlich und positiv.

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i z_i$$

folgt wegen der Neutralität von N

$$0 = b(x, x_i) = b\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j z_j, x_i\right) = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Die Form b ist nichtentartet in K, denn aus den Relationen

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i z_i,$$

$$b(x, y) = 0 \qquad \text{für alle} \quad y \in K$$

folgt $\beta_i = b(x, x_i) = 0$ und darum auch $\alpha_i = b(x, z_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Es sei $K = K_+ \oplus K_-$ eine Zerlegung von K (weil K endlichdimensional und nichtentartet ist, ist die Existenz bekanntlich garantiert) und es sei J_0 der von dieser Zerlegung definierte Operator in K so, daß

$$J_0 x = x_+ - x_- \qquad \text{für} \quad x = x_+ + x_-, \quad x_+ \in K_+, \quad x_- \in K_-$$

gilt. Wir wählen eine orthonormale Basis $\{e_1, \ldots, e_k\}$ von N bezüglich des Hilbertschen Skalarprodukts $[\cdot \mid \cdot]$ in K: $[x \mid y] = b(J_0 x, y)$.

Es sei $M = J_0(N)$. Für ein Element $x = J_0 x'$, $x' \in N$ gilt

$$b(x, x) = b(J_0 x', J_0 x') = b(J_0^2 x', x') = b(x', x') = 0.$$

Für $f_i = J_0 e_i$, $i = 1, \ldots, k$, gilt $M = V\{f_1, \ldots, f_k\}$ und

$$b(e_i, f_j) = b(e_i, J_0 e_j) = b(J_0 e_i, e_j) = [e_i \mid e_j] = \delta_{ij},$$

woraus folgt wie oben, daß die Summe $N \dot{+} M$ direkt ist. Weil $\dim M = \dim N = k$ ist, gilt $\dim (N \dot{+} M) = 2k$ und folglich $K = N \dot{+} M$.

Es ist zu zeigen, daß $X = K \oplus K^{\perp}$ gilt. Weil K nichtentartet ist, ist die Summe direkt. Es sei $\{y_1, \ldots, y_{2k}\}$ eine Basis von K. Weil

$$x = \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i y_i + \left(x - \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i y_i\right), \qquad \forall\, x \in X,$$

gilt, genügt es zu zeigen, daß wir die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k}$ mit

$$x - \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i y_i \in K^{\perp}$$

oder

$$b\left(x - \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i y_i, y_j\right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, 2k,$$

das heißt

$$\sum_{i=1}^{2k} b(y_i, y_j)\, x_i = b(x, y_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, 2k\,,$$

wählen können. Aber aus der Nichtentartetheit von K folgt, daß $\det(b(y_i, y_j)) \neq 0$ ist, und darum hat das Gleichungssystem eine Lösung. □

Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement e über dem Körper $\boldsymbol{K}$.

Das *Spektrum* $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathrm{x})$ des Elements $\mathrm{x} \in \mathcal{A}$ wird folgendermaßen definiert

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\mathrm{x}) = \{\, \lambda \in \boldsymbol{K} \mid \mathrm{x} - \lambda\,\mathrm{e} \text{ nicht regulär} \,\}\,.$$

Falls $\mathcal{A}$ eine komplexe Banachalgebra ist, ist das Spektrum jedes Elements eine kompakte nichtleere Menge in $\boldsymbol{C}$. In einer $*$-involutorischen Algebra $\mathcal{A}$ ist das Element x *selbstadjungiert*, wenn $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}$ gilt. Falls die Involution antilinear ist, ist das Spektrum jedes selbstadjungierten Elements symmetrisch bezüglich der reellen Achse.

Lemma 7.5. *Es sei $\mathcal{A}$ eine $*$-involutorische ($*$ antilinear) vollständige Teilalgebra von $\mathfrak{B}(X)$ des komplexen Banachraumes X derart, daß $I \in \mathcal{A}$ und $\mathfrak{K}_0(X) \subset \mathcal{A}$ gilt, und sei $b \in \mathrm{SP}(*)$. Wenn ein k-dimensionaler ($k < \infty$) neutraler Teilraum N in X existiert, gibt es einen Operator $T \in \mathcal{A}$* [10]:

$$T^* = T \quad \textit{und} \quad \operatorname{kard}\{\, \{\lambda\} \mid \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)\,,\ \operatorname{Im}\lambda > 0 \,\} = k\,. \tag{7.5}$$

Beweis. Die Bedingung (7.5) ist im Falle $k = 0$ immer erfüllt: es genügt $T = I$ zu wählen.

Es sei $k > 0$ und $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ eine feste Menge von verschiedenen komplexen Zahlen mit $\operatorname{Im}\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Wir definieren einen Operator $T \in \mathfrak{B}(X)$:

$$\begin{aligned} T e_i &= \lambda_i e_i\,, \\ T f_i &= \bar{\lambda}_i f_i\,, \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, k\,,$$
$$T x = 0\,, \qquad x \in K^{\perp}\,,$$

mit den Bezeichnungen von Lemma 7.4. Weil b beschränkt ist (Folgerung 5.6), ist $K^{\perp}$ abgeschlossen, und weil die Norm $\|\cdot\|$ vollständig angenommen ist, gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, daß

$$\|w\| \leq c\,\|\xi\|$$

für alle $\xi = w + z$, $w \in K$, $z \in K^{\perp}$ gilt.

Dann erhalten wir

[10]) Mit $\operatorname{kard} S$ wird die Mächtigkeit von S bezeichnet.

$$\|T\xi\| = \|Tw\| \leqq \|T|K\| \, \|w\| \leqq c\,\|T|K\| \, \|\xi\| ,$$

wo $T|K$ [11]) als ein Operator im endlichdimensionalen Raum beschränkt ist. Es gilt also $T \in \mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A}$.

Wenn wir für einen Operator S , $S(K) \subset K$, $S(K^\perp) \subset K^\perp$, die Bezeichnung $S = (S|K) \oplus (S|K^\perp)$ verwenden, gilt $T = T_0 \oplus O$ für den oben definierten Operator T , wobei $T_0 \in \mathcal{B}(K)$ und $\sigma_{\mathcal{B}(K)}(T_0) = \{\lambda_i \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{\bar{\lambda}_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ ist. Dann ist $T - \lambda I = (T_0 - \lambda I) \oplus (-\lambda I)$ (I bedeutet den identischen Operator in jedem Raum) und für $\lambda \neq 0$, λ_i , $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, k$, ist $(T_0 - \lambda I)^{-1} \oplus (-\lambda I)^{-1}$ die Inverse (in $\mathcal{A}$) von $T - \lambda I$. Andererseits gilt $\lambda_i \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)$, $i = 1, \ldots, k$.

Falls

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i + z , \qquad z \in K^\perp ,$$

$$y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i' e_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i' f_i + z' , \qquad z' \in K^\perp$$

ist, haben wir

$$b(Tx, y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i \bar{\beta}_i' + \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i \beta_i \bar{\alpha}_i' = b(x, Ty) .$$

Es gilt also $T^* = T$, und folglich ist Bedingung (7.5) erfüllt. □

Es seien $\mathcal{A}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement e und * eine antilineare Involution in $\mathcal{A}$. Sei auch x ein selbstadjungiertes Element so, daß

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = \{\lambda \in \sigma(\mathrm{x}) \mid \operatorname{Im} \lambda > 0\} , \qquad \sigma(\mathrm{x}) = \sigma_{\mathcal{A}}(\mathrm{x}) ,$$

und folglich

$$\{\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_k\} = \{\lambda \in \sigma(\mathrm{x}) \mid \operatorname{Im} \lambda < 0\}$$

ist.

Wir wählen offene Scheiben G_i , $i = 1, \ldots, k$, mit den Mittelpunkten λ_i und eine offene Menge G_0 , $\boldsymbol{R} \cap \sigma(\mathrm{x}) \subset G_0$, derart, daß für $G_i^* = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in G_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, die Abschließungen der Mengen G_i , G_j^* , G_0 alle paarweise punktfremd sind.

Es seien U_i , $i = 1, \ldots, k$, kleinere offene Scheiben so, daß $\lambda_i \in U_i \subset \overline{U}_i \subset G_i$, und U_0 eine offene Menge mit

$$\boldsymbol{R} \cap \sigma(\mathrm{x}) \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset G_0$$

[11]) $T|K$ = die Beschränkung der Abbildung T auf die Menge K .

so, daß der Rand von U_0 das Bild einer geschlossener positiv orientierter rektizifierbarer Jordan-Kurve $\gamma_0 : I = [0\,,1] \to \boldsymbol{C}$ ist. Es seien auch $\gamma_i : I \to \boldsymbol{C}$, $i = 1\,, \ldots, k$, positiv orientierte rektizifierbare Jordan-Kurven mit $\gamma_i(I) = \partial\, U_i$. Dann sind $\gamma_i^* : \gamma_i^*(t) = \overline{\gamma_i(1-t)}$ positiv orientierte Randkurven von U_i^* .

Wir benutzen die Terminologie von [6]. Es seien

$$G = G_0 \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k} (G_i \cup G_i^*)\right] \qquad \text{und} \qquad U = U_0 \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k} (U_i \cup U_i^*)\right].$$

Ferner bezeichne $\mathcal{H}(G)$ die Menge von lokalholomorphen [12]) Funktionen $f : G \to \boldsymbol{C}$. Dann definiert das Riemann—Stieltjessche Integral

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f(\lambda)\,(\lambda\,\mathrm{e} - \mathrm{x})^{-1}\, d\lambda \tag{7.6}$$

(die Konvergenz im Sinne der Norm von $\mathcal{A}$) eine Abbildung $f \to f(\mathrm{x}) : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{A}$ so [6: S. 168, Theorem 5.2.5], daß gilt:

$$f(\lambda) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{x}) = \mathrm{e}\,, \tag{7.7a}$$

$$f(\lambda) = \lambda \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}\,, \tag{7.7b}$$

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\mathrm{x}) = \alpha_1 f_1(\mathrm{x}) + \alpha_2 f_2(\mathrm{x})\,, \tag{7.7c}$$

$$(f_1 f_2)(\mathrm{x}) = f_1(\mathrm{x})\, f_2(\mathrm{x})\,. \tag{7.7d}$$

Weiter gilt für $f \in \mathcal{H}(G) : \sigma(f(\mathrm{x})) = f(\sigma(\mathrm{x}))$ $(= \{ f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(\mathrm{x}) \})$ [6: S. 171, Theorem 5.3.1].

Satz 7.6. *Es sei $X \neq (0)$ ein komplexer Banachraum und $\mathcal{A}$ eine bezüglich der Operatornorm vollständige Teilalgebra von $\mathfrak{B}(X)$ mit einer antilinearer Involution $*$ so, daß $\mathfrak{K}_0(X) \subset \mathcal{A}$ und $I \in \mathcal{A}$ gilt. Dann folgt aus*

$$\max_{T \in \mathcal{A}} \{ \operatorname{kard} \{\lambda\} \mid \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)\,,\ \operatorname{Im} \lambda > 0\,,\ T^* = T \} = k\,. \tag{7.8}$$

daß $*$ den gleichwertigen Bedingungen des Satzes 7.3 genügt.

Beweis. Weil die Involution antilinear ist, gilt $\mathrm{SP}(*) = O$. Es sei $b \in \mathrm{SP}(*)$. Wir zeigen, daß (7.8) zu der Bedingung (7.3) in Lemma 7.2 und folglich zu der Bedingung (b) des Satzes 7.3 führt.

Der Fall $k = 0$ ist wegen Lemma 7.5 trivial. Es seien also $k > 0$ und $T = T^*$ mit $\{\lambda_1\,, \ldots, \lambda_k\} = \{ \lambda \in \sigma(T) \mid \operatorname{Im} \lambda > 0 \}$. Wir benutzen die obigen Bezeichnungen und definieren die Funktionen $f_i\,, g_i \in \mathcal{H}(G)$:

[12]) Lokalholomorph = holomorph (analytisch) in jeder Komponente von G .

$$f_i(\lambda) = \begin{cases} 1\,, & \lambda \in G_i \\ 0\,, & \lambda \in G \setminus G_i \end{cases}, \qquad i = 1\,, \ldots, k\,,$$

$$g_i(\lambda) = \begin{cases} 1\,, & \lambda \in G_i^* \\ 0\,, & \lambda \in G \setminus G_i^* \end{cases}, \qquad i = 1\,, \ldots, k\,,$$

und die Elemente $E_i \in \mathscr{A}$ durch die Gleichung

$$E_i = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} f_i(\lambda)\,(\lambda I - T)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_i} (\lambda I - T)^{-1}\,d\lambda\,, \qquad i = 1\,, \ldots, k\,.$$

Es gilt wegen (7.7d)

$$E_i\,E_j = \delta_{ij}\,E_i\,, \qquad i\,,j = 1\,, \ldots, k\,, \tag{7.9}$$

wo wegen $\sigma(E_i) = \{0\,,1\}$ $E_i \neq 0$ ist.

Weiter ist

$$\begin{aligned} E_i^* &= -\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{\partial U_i} (\lambda I - T)^{-1}\,d\lambda\Bigg)^* \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{\max|t_j - t_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^{n} (\gamma_i(\tau_j) - T)^{-1}\,(\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1}))\right]^*, \end{aligned}$$

wo $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$, $\tau_j \in [t_{j-1}\,, t_j]$ gilt. Wegen der Stetigkeit von $*$ (Lemma 5.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} E_i^* &= -\frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{\max|t_j - t_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\gamma_i(\tau_j)} - T)^{-1}\,(\overline{\gamma_i(t_j)} - \overline{\gamma_i(t_{j-1})})\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{\max|t_j - t_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^{n} (\gamma_i^*(1 - \tau_j) - T)^{-1}\,(\gamma_i^*(1 - t_{j-1}) - \gamma_i^*(1 - t_j))\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_i^*} (\lambda I - T)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} g_i(\lambda)\,(\lambda I - T)^{-1}\,d\lambda\,. \end{aligned}$$

Darum gilt auch

$$E_i^*\,E_j = 0\,, \qquad i\,,j = 1\,, \ldots, k\,. \tag{7.10}$$

Aus (7.9) und (7.10) folgt, daß

$$E = \sum_{i=1}^{k} E_i$$

einen Projektor mit $E^*\,E = 0$, $\dim R(E) \geq k$ definiert. Es gilt also

$$\sup \{ \dim N \mid N \text{ ein neutraler Teilraum} \} \geqq k ,$$

und Lemma 7.5 zeigt, daß hier tatsächlich das Gleichheitzeichen richtig ist. $\square$

Sei umgekehrt (X , b), $X \neq (0)$, ein k-indefiniter komplexer Pontrjaginscher Raum und $\mathcal{A}$ eine vollständige $*$-involutorische Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$ so, daß $I \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{A}$ gilt, wo $*$ die von b erzeugte Involution ist.

Dann zeigt Lemma 7.5 die Ungleichung

$$\sup_{T \in \mathcal{A}} \{ \operatorname{kard} \{\lambda\} \mid \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(T) , \operatorname{Im} \lambda > 0 , T^* = T \} \geqq k .$$

Ob das Gleichheitzeichen allgemein gilt, bleibt hier ungelöst. In einigen Spezialfällen ist die Antwort jedoch positiv.

Es sei nämlich zuerst $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$. Es ist bekannt, daß das Spektrum $\sigma_{\mathcal{B}(X)}(T)$ eines selbstadjungierten Operators höchstens k Punkte in der oberen Halbebene hat [7: Theorem 3.6], vgl. auch [1: Theorem 3.10]. In diesem Fall ist also Bedingung (7.8) den Bedingungen von Satz 7.3 äquivalent.

Im allgemeinen gilt $\sigma_{\mathcal{B}(X)}(T) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(T)$. Wenn man für $\mathcal{A}$ einige Forderungen setzt, ergibt sich, daß für jedes selbstadjungierte Element $T \in \mathcal{A}$ das nichtreelle Spektrum in $\mathcal{A}$ und in $\mathcal{B}(X)$ zusammenfallen, und folglich ist die spektrale Charakterisierung gültig.

Es sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(X)$ ein normabgeschlossenes zweiseitiges Ideal so, daß $*(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ und $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{I}$ gilt [13]). Falls $\mathcal{I} \neq \mathcal{B}(X)$ ist und die Algebra $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A} = \lambda I + \mathcal{I} = \{ \lambda I + C \mid \lambda \in \boldsymbol{K} , C \in \mathcal{I} \} \tag{7.11}$$

definiert wird, ist $\mathcal{A}$ eine vollständige involutorische Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$ so, daß $\mathcal{A}$ alle beschränkten endlichdimensionalen Operatoren und den identischen Operator enthält, und jedes Element $T \in \mathcal{A}$ hat eine eindeutige Zerlegung $T = \lambda I + C$, $C \in \mathcal{I}$.

Falls $T = \lambda I + C$, $T^* = T$ und $\mu \notin \sigma_{\mathcal{B}(X)}(T)$, $\operatorname{Im} \mu = 0$ ist, folgt aus der Gleichung

$$(T - \mu I) B = I$$

[13]) Weil die Involution $*$ mit einer Hilbertschen Involution $[*]$ durch $T^* = J\, T^{[*]} J$ verbunden ist, sind für ein zweiseitiges Ideal $\mathcal{I}$ die Bedingungen $*(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ und $[*](\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ äquivalent. Es ist aber bekannt, daß die Abschließung von $\mathcal{K}_0(X)$ (bezüglich der Operatornorm) ein zweiseitiges (und wenn der Raum unendlich dimensional ist, echtes) Ideal von $\mathcal{B}(X)$ ist, was auch die adjungierten Operatoren enthält. Wenn der Raum separabel ist, ist das obige Ideal das einzige echte Ideal von $\mathcal{B}(X)$, das die Voraussetzungen erfüllt [17: Theorem 11]. Im nichtseparablen Fall gibt es mehrere solche [13: Corollary 5.2].

die Relation

$$(\lambda - \mu) B + C B = I .$$

Aber $\bar{\lambda} I + C^* = \lambda I + C$ zeigt, daß λ notwendigerweise reell ist.

Aus der Relation

$$B = (\lambda - \mu)^{-1} I - (\lambda - \mu)^{-1} C B \in \mathcal{A}$$

folgt, daß $\sigma_{\mathcal{B}(X)}(T) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) = \sigma_{\mathcal{A}}(T) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R})$ ist.

Wir formulieren das Resultat noch als einen Satz:

Satz 7.7. *Es seien $X \neq (0)$ ein Banachraum, und $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$ mit einer antilinearen Involution $*$ so, daß $\mathcal{A}$ die Form $\mathcal{A} = \lambda I + \mathcal{I}$ hat, wo $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{B}(X)$ mit $*(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ und $\mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{I}$ ist. Für die Involution $*$ ist Bedingung (7.8) den Bedingungen des Satzes 7.3 äquivalent.*

Bemerkung 7.8. *Im Falle $k = 0$ ist die gesuchte Gleichung gültig, denn dann reduziert sich die Betrachtung auf den Hilbertschen Fall, und man weiß sogar, daß das Spektrum eines selbstadjungierten Elements in jeder involutorischen vollständigen Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$ mit Einselement immer reell ist* [14: S. 310—311].

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Literatur

[1] AZIZOV, T. YA., und I. S. IOKHVIDOV: Linear operators in Hilbert spaces with a G-metric. - Russian Math. Surveys 26:4, 1971, S. 45-97.

[2] BOGNÁR, J.: Linear spaces with an indefinite product. - [Hektographierte Vorlesungsausarbeitung.] Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm, 1966.

[3] —»— Operator conjugation with respect to symmetric and skew-symmetric forms. - Acta Sci. Math. (Szeged) 31, 1970, S. 69–73.

[4] —»— Involution as operator conjugation. - Colloquia mathematica Societatis János Bolyai 5: Hilbert space operators and operator algebras [Tihany 1970] (Edited by B. SZ.-NAGY), (Distributed by) North-Holland Publishing Company, Amsterdam / London, 1972, S. 53–64.

[5] EIDELHEIT, M.: On isomorphisms of rings of linear operators. - Studia Math. 9, 1940, S. 97-105.

[6] HILLE, E., und R. S. PHILLIPS: Functional analysis and semi-groups. - [Revised edition.] American Mathematical Society Colloquium Publications XXXI. American Mathematical Society, Providence (R.I.), 1957.

[7] IOHVIDOV, I. S., und M. G. KREĬN: Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric I. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 13, 1960, S. 105–175.

[8] JACOBSON, N.: Lectures in abstract algebra. II. Linear algebra. - The university series in higher mathematics. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton (N.J.) / Toronto / London / New York, 1953.

[9] KAKUTANI, S., und G. W. MACKEY: Two characterizations of real Hilbert space. - Ann. of Math. (2) 45, 1944, S. 50–58.

[10] —»— —»— Ring and lattice characterizations of complex Hilbert space. - Bull. Amer. Math. Soc. 52, 1946, S. 727–733.

[11] KAWADA, Y.: Über den Operatorenring Banachscher Räume. - Proc. Imp. Acad. Tokyo 19, 1943, S. 616–621.

[12] KREĬN, M. G.: Introduction to the geometry of indefinite J-spaces and to the theory of operators in those spaces. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 93, 1970, S. 103-176.

[13] LUFT, E.: The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space. - Czechoslovak Math. J. 18, 1968, S. 595–605.

[14] NEUMARK, M. A.: Normierte Algebren. - Hochschulbücher für Mathematik 45. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.

[15] RICKART, C. E.: Representation of certain Banach algebras on Hilbert space. - Duke Math. J. 18, 1951, S. 27–39.

[16] —»— General theory of Banach algebras. - The university series in higher mathematics. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton (N.J.) / Toronto / London / New York, 1960.

[17] SCHATTEN, R.: Norm ideals of completely continuous operators. - Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge 27. Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg, 1960.

Gedruckt Mai 1974