Konformigeometrian mittaehtoja

Mikko Salo

Geometria on vanhimpia matematiikan osa-alueita, ja ala juontaa juurensa useissa eri kulttuureissa esiintyneiden käytännön mittaustehtävien ratkaisuihin. Nimi tulee kreikan sanoista *geo* (maa) ja *metron* (mittaus), ja geometrian ensimmäiset sovelluskohteet olivatkin maanmittauksessa, rakennustekniikassa ja tähtitieteessä. Geometria nousi itsenäiseksi tieteenalaksi antiikin Kreikassa. Eukleideen kuuluisa teos *Elementa* (Alkeet, noin 300 eKr.) käsitteli lukusuoran, tason ja kolmiulotteisen avaruuden geometriaa aksiomaattisen lähestymistavan kautta. Näiden *euklidisten avaruuksien* geometria on sitä geometriaa, jonka monet oppivat koulussa: euklidisissa avaruuksissa kolmion kulmien summa on 180°, Pythagoraan lause on voimassa ja yhdensuuntaiset suorat eivät koskaan leikkaa. Väisälä-palkintoesitelmän yhteydessä on aiheellista mainita, että koulugeometrian perusteet on hyvin esitetty Kalle Väisälän pitkään palvelleessa oppikirjassa *Geometria* (1959).

Ranskalainen filosofi ja matemaatikko Descartes esitti 1600-luvulla vaihtoehtoisen tavan käsitellä euklidisia avaruuksia. Tämä tapa perustui koordinaattien käyttöön, ja lähestymistapaa kutsutaan nimellä analyyttinen geometria. 1800-luvun alkupuolen geometriassa käsiteltiin myös joitain muita avaruuksia, kuten käyrät ja pinnat kolmiulotteisessa avaruudessa (esimerkiksi pallonkuori), teknisessä piirtämisessä tarvittavat projektiiviset avaruudet (Monge 1795), ja Eukleideen lähestymistavasta yhtä aksioomaa muuntamalla johdettu epäeuklidinen geometria (Bolyai ja Lobachevsky 1830).

Matematiikka on luonnontieteiden kieli, ja matematiikan eräs vahvuus on abstraktien käsitteiden hyödyntäminen luonnon ilmiöiden kuvaamisessa. Geometrian alan eräs suuri hetki koettiin vuonna 1854, kun saksalainen matemaatikko Bernhard Riemann (1826–1866) piti dosenttiluentonsa otsikolla ”Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen” Göttingenin yliopistossa. Tässä työssä Riemann:

– esitti abstraktin geometrisen avaruuden käsitteen
– esitti tavan mitata etäisyyksiä (Riemannin metriikka)
– esitti tavan mitata kaarevuutta (Riemannin kaarevuustensori).

Riemannin avaruudet on yleinen geometristen avaruuksien luokka, joka sisältää useimmat aiemmin käsitellyt avaruudet mutta myös monia muita. Osoittautuu, että Riemannin avaruuksissa voi toteuttaa differentiaali- ja integraalilaskentaa varsin samaan tapaan kuin euklidisissa avaruuksissa. Erityisesti Riemannin avaruuksissa on luonnollinen Laplace-operaattori, joka mahdollistaa monien fysikaalisten teorioiden (kuten sähkön ja lämmön johtuminen, aaltoliike ja kvanttimekaniikka) muotoilun näissä avaruuksissa. Kuuluisin Riemannin avaruuksilla, tai oikeastaan niiden aika-avaruusvastineilla eli Lorentzin avaruuksilla, muotoiltu fysikaalinen teoria lienee Albert Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria (1915).

Otsikossa esiintyvä konformigeometria voidaan ajatella avaruuden kulmat säilyttävien kuvausten eli konformikuvausten tutkimuksena. Konformikuvauksia käytetään kartografiassa (Mercatorin karttaprojektio), insinööritieteissä ja suhteellisuusteoriassa, ja näiden kuvausten ja niiden yleistysten tutkimus on ollut Suomen matematiikan suuri menestystarina.

Riemannin avaruudet antavat luontevan asetelman konformigeometrialle. Eräs perustava kysymys on seuraava: milloin annettu Riemannin avaruus on konformikuvausta vaille euklidinen avaruus? Erään vastauksen kysymykseen antoi matemaatikko, fyysikko ja filosofi Hermann Weyl (1885–1955), jonka mukaan nimetty Weylin kaarevuustensori mittaa tätä ominaisuutta, samaan tapaan kuin Riemannin kaarevuustensori mittaa Riemannin avaruuden euklidisuutta.

Sekä Riemannin että Weylin kaarevuustensorit johtavat monimutkaisiin differentiaaliyhtälöihin, jotka kertovat Riemannin avaruuden ominaisuuksista. Näiden yhtälöiden käsittelyssä on hyödyllistä käyttää otsikossa esiintyviä mittaehtoja. Yksinkertaisimmillaan mittaehto tarkoittaa yksiköiden valintaa: esimerkiksi pituutta voidaan mitata metrien sijaan jaardeissa, tai painoa kilogrammojen sijaan paunoissa. Matematiikassa ja fysiikassa esiintyy yleisempiä mittaehtoja, joiden avulla yhtälöjä voidaan ”mitata” esimerkiksi erilaisissa koordinaateissa tai konformiskaaloissa. Riemannin avaruuksien teoriassa erittäin hyödylliseksi on havaittu harmoninen mittaehto, joka on peräisin Einsteinin suhteellisuusteoriatöistä vuodelta 1916. Osoittautuu, että Riemannin avaruuksissa on erityisiä harmonisia koordinaatteja, joiden avulla Riemannin kaarevuustensorista tulevat monimutkaiset yhtälöt yksinkertaistuvat. Harmonisen mittaehdon avulla nähdään, että Riemannin yhtälöryhmän toteuttavat avaruudet ovat mukavan säännöllisiä (matematiikan kielellä sanotaan, että yhtälöryhmästä tulee elliptinen).

Harmoninen mittaehto on ollut käyttökelpoinen ja hyvin tunnettu useissa Riemannin avaruuksiin liittyvissä säännöllisyyskysymyksissä. Harmoninen mittaehto ei kuitenkaan ole yhteensopiva konformikuvausten kanssa, ja voidaankin kysyä: onko konformigeometriassa vastaavaa hyödyllistä mittaehtoa? Vastaus kysymykseen on myönteinen, ja konformiageometrian luonteva vastine on n-harmoninen mittaehto (joka liittyy n-harmonisten koordinaattien olemassaoloon) yhdistettynä sopivaan konformiskaalaukseen. Kyseinen mittaehto esiteltiin vain vähän aikaa sitten (Liimatainen-Salo, Mathematical Research Letters 2014). On mielestäni yllättävää, että tätä perustavaa mittaehtoa ei ole löydetty aiemmin; kuitenkin kyseessä on suoraviivainen ja hyödyllinen yleistys Einsteinin esittämälle harmoniselle mittaehdolle, joka on tunnettu jo 100 vuoden ajan. Mittaehdolla on välittömiä sovelluksia konformikuvausten säännöllisyyteen, konformigeometrian yhtälöiden elliptisyyteen ja Weylin kaarevuustensorin tulkintaan. Oletettavasti seuraavien 100 vuoden aikana mittaehdolle löydetään muitakin käyttökohteita.

Gauge conditions in conformal geometry

Summary

Geometry is one of the oldest disciplines in mathematics. Euclid's famous treatise Elements (300 BC) dealt with the geometry of the line, plane and three-space based on an axiomatic approach. These spaces are called Euclidean spaces, and Euclidean geometry is the kind of geometry which most people learn in school. A major development in geometry was Riemann's Habilitation lecture in 1854. In this lecture, Riemann introduced a large class of spaces (Riemannian manifolds) generalizing Euclidean spaces but still retaining differential and integral calculus and several physical theories.

Conformal geometry, or the study of angle-preserving transformations, can be naturally developed on Riemannian manifolds. Various complicated equations that appear in these geometric contexts can be studied via suitable gauge conditions. In Riemannian geometry, the harmonic gauge condition going back to Einstein's work on general relativity in 1916 has been particularly useful. The natural conformal analogue of this condition, the so called n-harmonic gauge condition, was only discovered recently (Liimatainen-Salo, Mathematical Research Letters 2014). The n-harmonic gauge condition has immediate consequences to regularity of conformal mappings and to the study of conformal curvature tensors, and further applications are expected to arise in the future.